

Bölüm 2

Deneyssel Bulguların Analizi

Prof.Dr. Muhammet KAYFECİ

Deney, bir değişkenin etkilerinin gözlemlemek üzere kontrollü koşullar altında yapılan gözlem olarak tanımlanabilir.

2.1 Deneysel Yöntem Aşamaları

Deneysel yöntem temel olarak altı aşamadan oluşur.

1. Kavramsal hazırlık
2. Fiziksel hazırlık
3. Veri toplama
4. Veri işleme (Sonuçların elde edilmesi)
5. Sonuçların analiz edilmesi
6. Sonuçların aktarımı

Kavramsal Hazırlık: İncelenecek fiziksel olayın ne olduğu fiziksel anlamı anlaşılır. Neyin, nasıl ölçüleceği ve fiziksel olarak sistemin davranışına karar verilir.

Fiziksel Hazırlık: Alet ve cihaz temini yapılır. Alet ve cihazların doğru çalışıp çalışmadığı kontrol edilir ve gerekli ise kalibrasyon yapılır. Deney yapılacak test parçası veya deney düzeneği hazırlanır. Çevre koşulları deney için uygun hale getirilir.

Veri Toplama: Deneylerin başlamasından sonra veriler toplanmaya başlanır. Gözle veya bir cihaz yardımıyla periyodik olarak kayıt altına alınır.

Veri İşleme (Sonuçların Elde Edilmesi): Toplanan ham verinin fiziksel olarak anlamlı hale getirilmesi işlemidir. Uygun değişkenlerle verilerin ifade edilmesi ile tablo ve grafikler yardımıyla verinin gösterilmesi. (Sonuçlar)

Sonuçların Analiz Edilmesi: Sonuçların fiziksel olarak mantıklı olup olmadığı kontrol edilir. Hata miktarları ve bunların etkileri analiz edilir.

Sonuçların Aktarımı: Yazılı deney raporunun hazırlanması. Deney düzeneği, ölü aletleri ve hata-belirsizlik analizi verilir. Deney koşullarının ve değişkenler verilir. Sonuçlar grafik ve tablo olarak verilir ve değerlendirilir. Son olarak hangi sonuca varıldığı ve yapılan tavsiyeler verilir.

2. Ölçme Hataları

Deney yapılırken, deney ne kadar kusursuz olursa olsun muhakkak deney sonuçlarında bir miktar hata bulunmaktadır.

Önemli olan oluşan hata miktarının kabul edilebilir düzeyde olmasıdır.

2.2.1 Ölçme hatalarını etkileyen faktörler

1. Ölçme ortamı:

- Ortamın sıcaklığı
- Ortamın basıncı
- Ortamın nem oranı
- Ortamın gürültü
- Titreşim

2. Ölçme aleti:

- Üretim hataları
- Deformasyon

3. Ölçülen özellik:

- Yüzeydeki geometrik özellikler (yüzey pürüzlülüğü, dairesellik vb.)
- Büyüküğün sabit-stabil olmaması
- İşletme anında oluşan yapısal değişiklikler

4. Ölçümü yapan kişi:

- Okuma hatası
- Tecrübesi
- Dikkati
- Yeteneği

ÖLÇMEYİ ETKİLEYEN FAKTÖRLER

Ölçme aracının veya ölçmeyi etkileyen diğer faktörlerin etkisiyle ölçmede mutlaka hata yapılmaktadır. Bu Faktörler;

1-Fiziksel faktörler

- Sıcaklık,
- Hava basıncı,
- Nem

2- Ölçme aracının yetersizliği

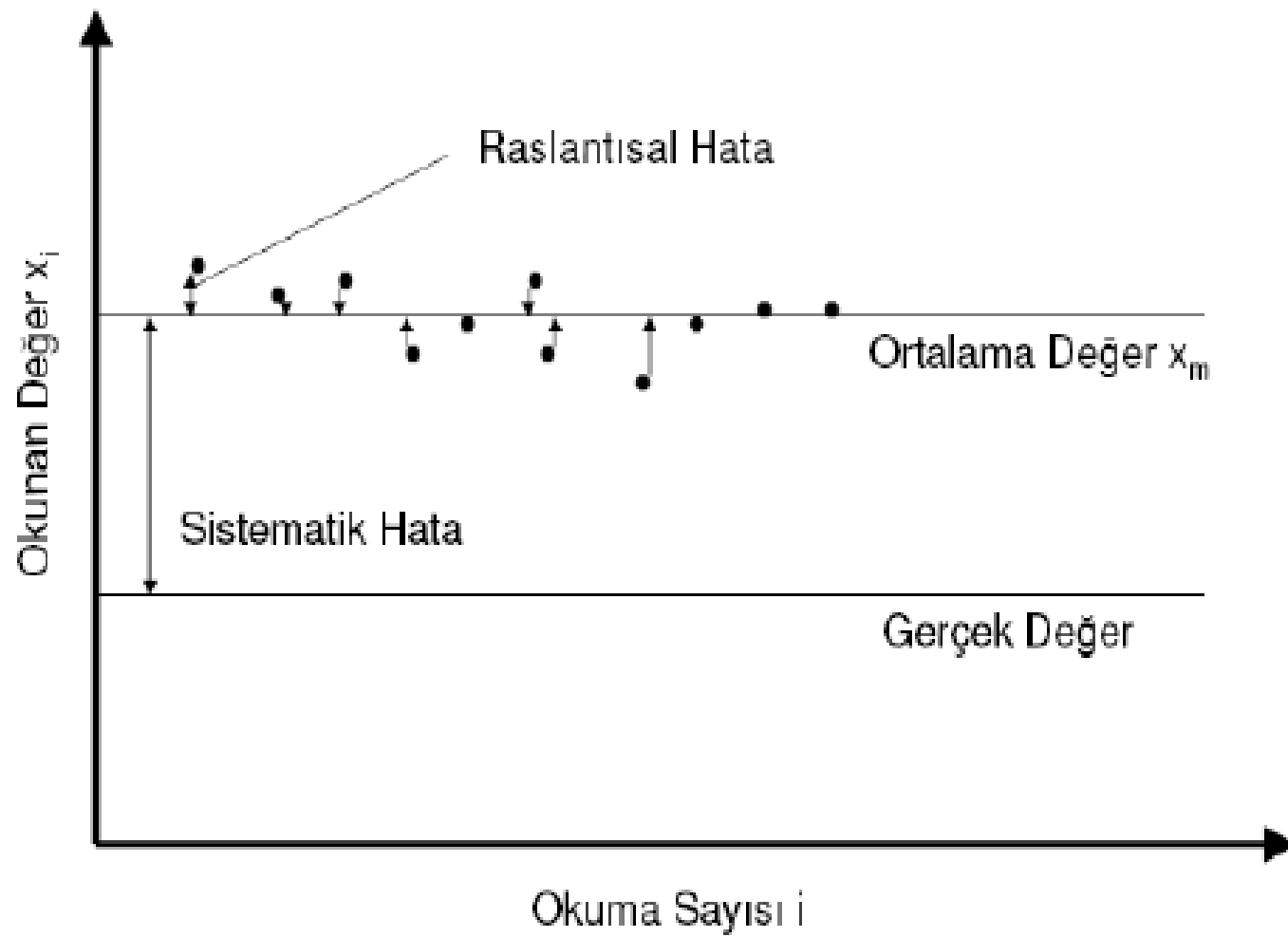
- Üretim hataları (paralellik, düzlemsellik)
- Zamanla meydana gelen değişimler (boyut, şekil, konum)

3- Ölçülen iş parçasından kaynaklanan hatalar

- Makro geometrik durumundan (şekil ve konum farklılığı)
- Mikro geometrik durumundan (yüzey pürüzlülüğü v.b.)
- Yapısal durumundan (işleme sırasında oluşan değişiklikler)

4- Kişisel ve rastlantı hatalar

- Ölçen kişinin ruhsal durumu, yeteneği
- Ölçme araçlarının durumu, yeteneği
- Okuma hataları.



1- Hata analizinde akılcı yaklaşım

Bu tip hata analizinde ölçme sisteminde bulunan bütün aletlerin aynı anda maksimum hatayı yaptığı kabul edilir.

Örnek:

$$P = E.I$$

$$P = I^2.R$$

P: Elektrik devresinin gücü (W)

E: Gerilim (Volt)

I: Akım (Amper)

Elektrik devresindeki güç ölçülmek istenirse;

$$E = 100 \text{ V} \pm 2 \text{ V}$$

$$I = 10 \text{ A} \pm 0,2 \text{ A}$$

değerleri okunmuş olsun;

Nominal güç

$$P = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ W}$$

Yapılabilecek en hatalı iki değer;

$$P_{\text{mak}} = (100 + 2) \cdot (10 + 0,2) = 1040,4 \text{ W}$$

$$P_{\text{min}} = (100 - 2) \cdot (10 - 0,2) = 960,4 \text{ W}$$

Böyle bir ölçmede akılcı yaklaşım metodu kullanılarak hata yüzdesi +4,04 ile -3,96 değerlerindedir.

2- Belirsizlik Analizi

Hata analizinde daha hassas bir yöntemdir. Ölçülmesi gereken büyüklük R, ve bu büyüklüğe etki eden n adet bağımsız değişken ise;

$$x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n$$

$$R = R(x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n)$$

Her değişkene ait hata oranı $w_1, w_2, w_3 \dots \dots \dots w_n$ ve R büyüklüğünün hata oranı w_R ise;

$$w_R = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} w_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} w_2 \right)^2 + \dots \dots \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} w_n \right)^2 \right]^{1/2}$$

Örnek:

$$E = 100V \pm 2V \text{ ve } I = 10A \pm 0,2A$$

İse hatayı belirsizlik analizine göre çözünüz?

Çözüm:

$$w_E = 2V, \quad w_I = 0,2A$$

değerlerinde iken;

$$\frac{\partial P}{\partial E} = I = 10A \text{ ve } \frac{\partial P}{\partial I} = E = 100V$$

değerlerinde olacaktır. Sonuç olarak;

$$w_P = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial E} w_E \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} w_I \right)^2 \right]^{1/2} = [(10.2)^2 + (100.0,2)^2]^{1/2} = 28,3W$$

Olarak bulunur. Aynı ölçmenin akılcı yaklaşım ile hata analizi % +4,83 ve % -3,94 verirken, belirsizlik analizi % $\pm 2,83$ vermektedir.

Örnek: Bakır bir çubuğun direnci şu eşitlikle belirlenmektedir:

$$R = R_0[1 + \alpha(T - 20)]$$

Burada $R_0 = 6\Omega \pm \%0,3$, 20°C 'deki direnç, $\alpha = 0.004\ ^\circ\text{C}^{-1} \pm \%1$ direncin sıcaklık katsayısıdır. Telin sıcaklığı ise $T = 30 \pm 1^\circ\text{C}$ olarak verilmektedir. Bakır telin direncini ve bu değerdeki belirsizliği hesaplayın.

Çözüm: $R = 6[1 + (0.004)(30 - 20)] = 6.24\Omega$

$$\frac{\partial R}{\partial R_0} = 1 + \alpha(T - 20) = 1 + (0.004)(30 - 20) = 1.04$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = R_0(T - 20) = (6)(30 - 20) = 60$$

$$\frac{\partial R}{\partial T} = R_0\alpha = (6)(0.004) = 0.024$$

$$w_{R_0} = (6)(0.003) = 0.018\Omega$$

$$w_\alpha = (0.004)(0.01) = 4 \times 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$$

$$w_T = 1^\circ\text{C}$$

Böylece direnç değerindeki belirsizlik:

$$\begin{aligned} w_R &= [(1.04)^2(0.018)^2 + (60)^2(4 \times 10^{-5})^2 + (0.024)^2(1)^2]^{1/2} \\ &= 0.0305\ \Omega \quad \text{veya} \quad 0.49\ \% \end{aligned}$$

Örnek Bir otomobilin belirli bir süre aralığındaki *ortalama hızı* ($v = x/t$) hesaplanmak istenmektedir. Buna göre; t söz konusu zaman aralığını, x de bu zaman aralığında alınan yolu göstermek üzere;

a) $x = 10 \text{ [km]}$ ve $t = 500 \text{ [s]}$ olarak verildiğine göre; bu otomobilin *ortalama hızının nominal değerini* (v_n) *m/s* cinsinden hesaplayınız.

b) $x = 10 \text{ [km]} \pm \% 5$ ve $t = 500 \pm 5 \text{ [s]}$ olarak verildiğine göre; *akılcı yaklaşımın* kullanılması durumunda, bu otomobilin *ortalama hızının hesaplanmasında* yapılacak hata miktarlarını *yüzdesel* olarak bulunuz.

c) Yukarıdaki veriler geçerli olmak üzere; *belirsizlik analizinin* kullanılması durumunda, bu otomobilin *ortalama hızının hesaplanmasında* yapılacak hata miktarını *yüzdesel* olarak bulunuz.

$$R = R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ ise; } w_R = \pm \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} w_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} w_{x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} w_{x_3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} w_{x_n} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ şeklindedir.}$$

Çözüm

a) Otomobilin ortalama hızının nominal değerinin bulunması:

$$x = 10 \text{ [km]} = 10000 \text{ [m]} \quad \text{ve} \quad t = 500 \text{ [s]} \Rightarrow v_n = \frac{x}{t} = \frac{10000}{500} = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ bulunur.}$$

b) Akılcı yaklaşıma göre çözüm: $x = 10 \text{ [km]} \pm \%5$ ve $t = 500 \pm 5 \text{ [s]}$ olarak verildiğinden;

$$w_x = \pm(10000)(0.05) = \pm 500 \text{ [m]} \quad \text{ve} \quad w_t = \pm 5 \text{ [s]} \text{ bulunur. Buna göre;}$$

$$v_{maks.} = \frac{x + w_x}{t - w_t} = \frac{10000 + 500}{500 - 5} \cong 21.21212 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ ve}$$

$$\% Hata \ v_{maks.} = \frac{v_{maks.} - v_n}{v_n} \cdot 100 = \frac{21.21212 - 20}{20} \cdot 100 \cong \% + 6.06061 \text{ bulunur.}$$

$$v_{min.} = \frac{x - w_x}{t + w_t} = \frac{10000 - 500}{500 + 5} \cong 18.81188 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ ve}$$

$$\% Hata \ v_{min.} = \frac{v_{min.} - v_n}{v_n} \cdot 100 = \frac{18.81188 - 20}{20} \cdot 100 \cong \% - 5.94059 \text{ bulunur.}$$

c) Belirsizlik analizine göre çözüm:

$v = \frac{x}{t}$ olduğundan; $w_v = \pm \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} w_x \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} w_t \right)^2 \right]^{1/2}$ şeklinde olacaktır. Buna göre;

$$w_v = \pm \left[\left(\frac{1}{t} w_x \right)^2 + \left(-\frac{x}{t^2} w_t \right)^2 \right]^{1/2} = \pm \left[\left(\frac{1}{500} (500) \right)^2 + \left(-\frac{10\,000}{500^2} (5) \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$w_v \cong \pm 1.01980 \left[\frac{m}{s} \right] \text{ ve}$$

$$\%w_v = \frac{w_v}{v_n} \cdot 100 = \frac{\pm 1.01980}{20} \cdot 100 \cong \% \pm 5.09902 \text{ bulunur.}$$

Örnek Bir klima santralının dikdörtgen kesitli kanalından akmakta olan nemli havanın kütleli debisi, $\dot{m} = \rho A v$ [kg/s] bağıntısı ile hesaplanacaktır. Burada; ρ nemli havanın yoğunluğunu [kg/m³], A kanalın kesit alanını [m²] ($A=a \cdot b$ şeklindedir) ve v kanaldaki ortalama hızı [m/s] göstermektedir. Yapılan ölçümlerde; $\rho = 1.28$ [kg/m³] $\pm$ %2, $a = 0.30 \pm 0.003$ [m], $b = 0.40 \pm 0.004$ [m] ve $v = 3$ [m/s] $\pm$ %3 şeklinde bulunmuştur. Buna göre;

- a) Kütleli debinin *nominal değerini* ($\dot{m}_n$) hesaplayınız.
- b) Akılcı yaklaşımın kullanılması durumunda yapılan hata miktarlarını yüzdesel olarak bulunuz.
- c) Belirsizlik analizinin kullanılması durumunda yapılan hata miktarını yüzdesel olarak bulunuz.

Çözüm

$$\dot{m}_n = \rho A v \Rightarrow \dot{m}_n = ? \quad w_m = ?$$

- a) Kütleli debinin *nominal değerinin* ($\dot{m}_n$) bulunması:

$$\text{Yani; } \dot{m}_n = \rho A v \Rightarrow \dot{m}_n = ?$$

$$\dot{m}_n = \rho A v = 1.28 \cdot (0.30 \cdot 0.40) \cdot 3 = 0.4608 \text{ [kg/s]}$$

b) Akılcı yaklaşıma göre çözüm:

$\rho = 1.28 \text{ [kg/m}^3\text{]} \pm \%2$ olarak verildiğinden; $w_\rho = \pm(1.28)(0.02) = \pm 0.0256 \text{ [kg/m}^3\text{]}$,

$v = 3 \text{ [m/s]} \pm \%3$ olarak verildiğinden; $w_v = \pm(3)(0.03) = \pm 0.09 \text{ [m/s]}$ bulunur. Buna göre;

$$\dot{m}_{maks.} = (\rho + w_\rho)(A + w_A)(v + w_v) \quad A = ab \text{ olduğundan; } \dot{m}_{maks.} = (\rho + w_\rho)(a + w_a)(b + w_b)(v + w_v)$$

$$\dot{m}_{maks.} = (1.28 + 0.0256)(0.3 + 0.003)(0.4 + 0.004)(3 + 0.09) \cong 0.49385 \text{ [kg/s]} \text{ bulunur.}$$

$$\%Hata = \frac{\dot{m}_{maks.} - \dot{m}_n}{\dot{m}_n} \cdot 100 \cong \frac{0.49385 - 0.4608}{0.4608} \cdot 100 \cong \% + 7.17231$$

$$\dot{m}_{min.} = (\rho - w_\rho)(A - w_A)(v - w_v) \quad A = ab \text{ olduğundan; } \dot{m}_{min.} = (\rho - w_\rho)(a - w_a)(b - w_b)(v - w_v)$$

$$\dot{m}_{min.} = (1.28 - 0.0256)(0.3 - 0.003)(0.4 - 0.004)(3 - 0.09) \cong 0.42932 \text{ [kg/s]} \text{ bulunur.}$$

$$\%Hata = \frac{\dot{m}_{min.} - \dot{m}_n}{\dot{m}_n} \cdot 100 \cong \frac{0.42932 - 0.4608}{0.4608} \cdot 100 \cong \% - 6.83160$$

c) Belirsizlik analizine göre çözüm:

Bilindiği gibi; $w_{\dot{m}} = \pm \left[\left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} w_{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial A} w_A \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial v} w_v \right)^2 \right]^{1/2}$ şeklinde verilir. Buna göre;

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} = Av = (0.30 \cdot 0.40) \cdot 3 = 0.36 \text{ [m}^3/\text{s]}$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial A} = \rho v = 1.28 \cdot 3 = 3.84 \text{ [kg/m}^2\text{s]}$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial v} = \rho A = 1.28 \cdot (0.30 \cdot 0.40) = 0.1536 \text{ [kg/m]}$$

$$A = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad w_A = \pm \left[\left(\frac{\partial A}{\partial a} w_a \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b} w_b \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{olacaktır.}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b = 0.40 \text{ [m]} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial A}{\partial b} = a = 0.30 \text{ [m]} \Rightarrow$$

$$w_A = \pm \left[(0.4 \cdot 0.003)^2 + (0.3 \cdot 0.004)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow w_A = \pm 0.0016971 \text{ [m}^2\text{]} \text{ bulunur.}$$

$$w_{\dot{m}} = \pm \left[\left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} w_{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial A} w_A \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{m}}{\partial v} w_v \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$w_{\dot{m}} = \pm \left[(0.36 \cdot 0.0256)^2 + (3.84 \cdot 0.0016971)^2 + (0.1536 \cdot 0.09)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow w_{\dot{m}} \cong \pm 0.0178467 \text{ [kg/s]}$$

$$\%w_{\dot{m}} = \frac{w_{\dot{m}}}{\dot{m}_n} \cdot 100 = \frac{\pm 0.0178467}{0.4608} \cdot 100 = \% \pm 3.87298 \text{ bulunur.}$$

3- Deneysel bulguların istatistiksel analizi

- Bir ölçme aleti ile herhangi bir fiziksel büyüklüğün ölçümleri aynı veya değişik şahıs tarafından tekrarlandığında değerler arasında farklılıklar görülür. Bu nedenle genellikle bu değerlerin ortalaması önemlidir.
- Aynı büyüklük için yapılan n adet ölçümün her biri x_i ise x_m şeklinde tanımlanan aritmetik ortalama;

$$x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Her bir ölçüm değerinin ortalama değerden farkı ise sapma değeridir.

$$d_i = x_i - x_m$$

Burada bütün sapmaların aritmetik ortalaması, sıfır değerindedir. Çünkü;

$$|\overline{d_i}| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m) = x_m - \frac{1}{n} n \cdot x_m = 0$$

Sapmaların mutlak değerlerinin ortalaması ise;

$$|\overline{d_i}| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_m|$$

Bu değerin sıfır olma şartı yoktur. Deneysel bulguların, aritmetik ortalama değerden olan sapmaların dağılımını gösteren bir büyüklük standart sapma veya sapmaların karelerinin karekökü;

$$\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2}$$

şeklinde verilmektedir. Bu değerin karesi σ^2 ise değişiklik (varyans) olarak adlandırılır.

Deneysel araştırma yapan araştırmacılar, her zaman yeteri kadar bulgu toplayamaz. Deneysel bulgularda uygun bir değerlendirme yapılabilmesi için en az 20 ölçme sonucu gereklidir. Daha az sayıda ölçme halinde örnek standart sapma kullanılır. Burada n yerine n-1 kullanılır.

$$\sigma = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2}$$

Örnek: Bir ocaktan çıkan kömür numunelerinde yapılan nem ölçmesinde, aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Bu değerlere göre, aritmetik ortalamayı, sapmaların mutlak ortalamasını, standart sapmayı, değişikliği (varyansı) ve örnek standart sapmayı bulunuz?

Numune	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nem(%)	11,2	9,3	12,3	9,2	11,0	14,1	8,9	9,7	10,3	10,0

Çözüm: Aritmetik ortalama

$$x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} 106 = 10,6 \quad \text{veya} \quad \%10,6$$

Bu değere göre aşağıdaki tablo hazırlanarak istenen diğer değerler bulunabilir.

Numune	$d_i = x_i - x_m$	$(x_i - x_m)^2$
1	0,6	0,36
2	-1,3	1,69
3	1,7	2,89
4	-1,4	1,96
5	0,4	0,16
6	3,5	12,25
7	-1,7	2,89
8	-0,9	0,81
9	-0,3	0,09
10	-0,6	0,36
		$\Sigma=23,45$

Sapmaların mutlak ortalaması;

$$|\overline{d_i}| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_m| = 1,24 \quad \text{veya} \quad \%1,24$$

Standart sapma:

$$\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{10} (23,45) \right]^{1/2} = 1,53 \quad \text{veya} \quad \%1,53$$

Değişiklik (varyans):

$$\sigma^2 = (1,53)^2 = 2,35$$

Örnek standart sapma:

$$\sigma = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{9} (23,45) \right]^{1/2} = 1,61$$

Örnek:

Aşağıdaki tablo fiziksel bir uzunluğun ölçüm sonuçlarını yansıtmaktadır. Ölçümlerin aritmetik ortalama değerini, sapmaların mutlak değerinin ortalamasını, standart sapmasını, varyansını ve örnek standart sapmasını bulunuz.

Okuma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i , cm	5.3	5.73	6.77	5.26	4.33	5.45	6.09	5.64	5.81	5.75

Çözüm:

Aritmetik ortalama :
$$X_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{10} (56,13) = 5,613 \text{ cm}$$

Hesaplanan aritmetik ortalama değerine göre aşağıdaki tablo hazırlanarak istenen değerler bulunabilir.

Ölçüm	$d_i = X_i - X_m$	$(X_i - X_m)^2$
1	-0,313	0,097969
2	0,117	0,013689
3	1,157	1,338649
4	-0,353	0,124609
5	-1,283	1,646089
6	-0,163	0,026569
7	0,477	0,227529
8	0,027	0,000729
9	0,197	0,038809
10	0,137	0,018769

Sapmaların mutlak ortalaması : $\left| \overline{d_i} \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_m| = 0,4224 \text{ cm}$

Standart sapma : $\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{10} (3,533) \right]^{1/2} = 0,5944 \text{ cm}$

Varyans (Değişiklik) : $\sigma^2 = 0,3533 \text{ cm}^2$

Örnek standart sapma : $\sigma_{\delta} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{9} (3,533) \right]^{1/2} = 0,6265 \text{ cm}$

Geometrik ortalama:

Oransal değişimlerin görüldüğü bazı fiziksel olayların açıklanmasında, geometrik ortalama tanımı daha kullanışlıdır. Örnek adedi n olmak üzere bu tanım;

$$x_g = [x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n]^{1/n}$$

Şeklinde verilmektedir. Bu tanım özellikle parasal ve biyolojik olaylarda uygun çözümler verebilmektedir.

Örnek:

Bir ormandaki tavşanların sayısının 10 yıllık değişimi aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu değerlere göre tavşanların yıllık artma oranını bulunuz. Bu orandan yararlanarak 10. ve 15. yıllardaki tavşan sayılarını bulunuz.

Yıl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Adet	5000	5500	5300	6000	5900	6100	6200	6400	6350	6550
Oran		1,1	0,964	1,132	0,983	1,034	1,016	1,032	0,992	1,031

Çözüm:

Ortalama yıllık büyüme oranı:

$$[(1,1)(0,964)(1,132)(0,983)(1,034)(1,016)(1,032)(0,992)(1,031)]^{1/9} = 1,03$$

$$10.\text{yıldaki tavşan adedi: } 5000(1,03)^9 = 6541 \text{ (gerçekte 6550)}$$

$$15.\text{yıldaki tavşan adedi: } 5000(1,03)^{14} = 7595$$

Örnek : Bir malın değeri 1000 birim olup, her yılın sonundaki değişim oranları aşağıdaki gibidir. 4. yıl sonundaki (5. yıl başı) malın değerindeki ortalama değişim oranını ve değerinin kaç birim olduğunu hesaplayınız.

Yıl	Malın Değeri	Önceki Yıla Göre Değişim Oranı
1	1000 (A)	-
2	890	0.890
3	990	1.1124
4	1100	1.1111
5	1250	1.1364

Çözüm :

- Ortalama değişim oranı:

$$x_g = [x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5]^{\frac{1}{4}}$$

$$x_g = [(0.89) \cdot (1.1124) \cdot (1.1111) \cdot (1.1364)]^{\frac{1}{4}}$$

$$x_g = 1.0574$$

- 4. yıl sonundaki malın değeri:

$$A_g = A \cdot (x_g)^n = (1000) \cdot (1.0574)^4 = 1250 \text{ birim}$$

4- En küçük kareler yöntemi:

a) Tek değişkenin veya tek ölçmenin olduğu sistemler:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ şeklinde n adet deney bulgusu varsa; ortalama x_m değerinden olan sapmaların karelerinin toplamı;

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2$$

şeklinde tanımlanır. Buradan S değerini minimum yapacak şekilde x_m ortalama değeri bulunmak istenirse;

$$x_m = \sum_{i=1}^n x_i$$

elde edilir. Tek ölçmenin olduğu sistemlerde, bir ortalama değerden olan sapmaların karelerini minimum yapan değer (en küçük kareler yöntemi) aritmetik ortalama değerini vermektedir.

b) İki değişkenli sistemler:

x ve y gibi iki değişkenin belirli bir aralıkta ölçüldüğünü ve y ifadesinin x değişkenine göre analitik bir ifadesi bulunmak istenirse; bunun en kolay yolu x ve y değişkenlerini bir grafik kağıdına işaretleyerek aralarında uygun bir eğri çizmektir.

$$y = ax + b$$

Şeklinde doğrusal (lineer) bir ifade varsayalım. Bu ifadede amaç bağıntıda y değeri ile ölçülen her bir noktanın y değeri arasındaki farkı azaltmaktır. En küçük kareler yöntemine göre yazılan;

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

İfadesinin, ayrı ayrı a ve b katsayılarına göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenerek,

$$nb + a \sum x_i = \sum y_i$$

$$b \sum x_i + a \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

denklemleri yazılabilir.

İki bilinmeyenli bu iki denklemin çözümü;

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n [-2x_i(y_i - ax_i - b)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a} = \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - \sum b x_i = 0 \Rightarrow \sum x_i y_i = a \sum x_i^2 + b \sum x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n [-2(y_i - ax_i - b)] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \Rightarrow \sum y_i = a \sum x_i + nb$$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

Herhangi bir i noktasında hesaplanmış y_i değeri $\bar{y}_i$ ise;

$$\bar{y} = ax + b$$

Şeklinde olduğundan,

$$\text{Standart hata} = \left[\frac{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2}{n-2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{n-2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Örnek: Yapılan bir deneyde çelik bir malzemenin ısı iletim katsayısının sıcaklıkla değişimi aşağıda verilmiştir.

Sıcaklık $x_i(^{\circ}C)$	Isı iletim katsayısı $y_i(W/mK)$
5	73
90	65
205	64
297	55
407	50
503	41
608	40
$\sum x_i = 2115$	$\sum y_i = 388$

En küçük kareler yöntemini kullanarak, bu çelik malzeme için ısı iletim katsayısının, sıcaklıkla değişimini veren doğrusal ifadeyi bulunuz.

Çözüm: $y = ax + b$ şeklinde bir eşitlik aranmaktadır. Bunun için öncelikle aşağıdaki değerler hesaplanmalıdır.

Eşitlikteki a ve b katsayılarını bulabilmek için $n=7$ alınarak,

$x_i y_i$	x_i^2
365	25
5850	8100
13120	42025
16335	88209
20350	165649
20623	253009
24320	369664
$\sum x_i y_i = 100963$	$\sum x_i^2 = 926681$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

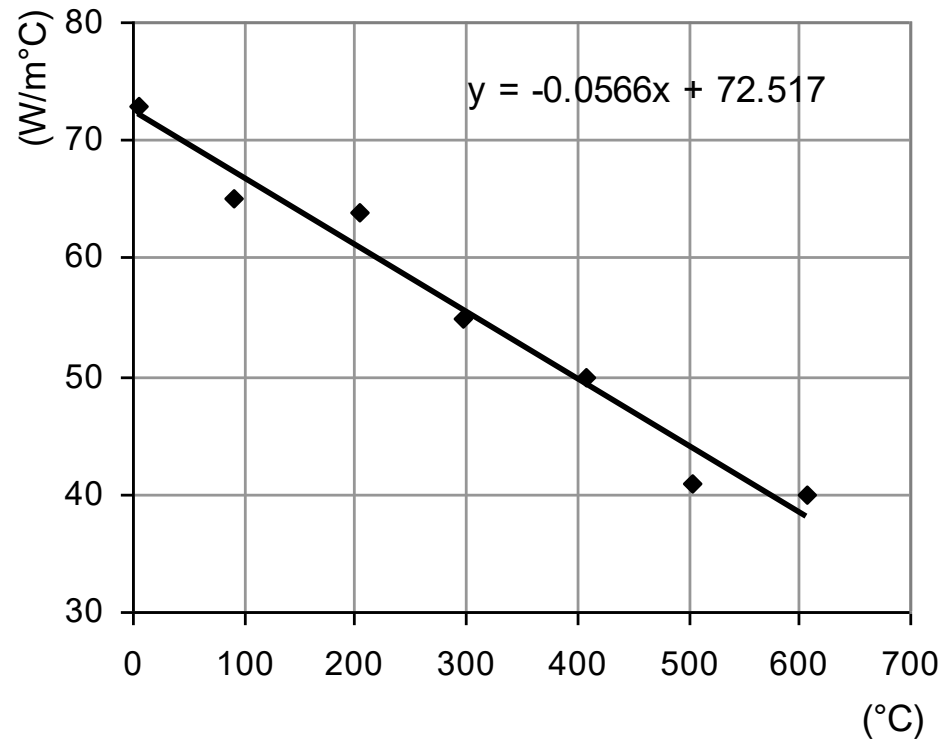
$$a = \frac{(7)(100963) - (2115)(388)}{(7)(926681) - (2115)^2} = -0,0565$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{(388)(926681) - (100963)(2115)}{(7)(926681) - (2115)^2} = 72,52$$

$$y = -0,0565x + 72,52$$

Bulgular grafikte gösterilirse;



5- Korelasyon katsayısı:

En küçük kareler yöntemiyle elde edilen bu korelasyon eğrisinin deney bulgularıyla ne kadar iyi bir uyum sağladığı, r korelasyon katsayısı ile belirlenir. Bu katsayı;

$$r = \left[1 - \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_y^2} \right]^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada,

$$\sigma_y = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_m)^2}{n - 1} \right]^{1/2}$$

$$\sigma_{y,x} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{ic})^2}{n - 2} \right]^{1/2}$$

Şeklinde, y değişkenin standart sapmalarıdır. Denklemlerdeki y_i , y değişkenin gerçek değeri iken y_{ic} ise aynı x değerindeki korelasyon denkleminde hesaplanmış değerlerdir.

Korelasyon katsayısı bire ne kadar yakınsa kullanılan eşitlik, deneysel bulgu noktaları ile o kadar uyum sağlamıştır.

Örnek: Aşağıda verilen verilere göre korelasyon katsayısını hesaplayınız?

Isı iletim katsayısı $y_i (W/mK)$	Sıcaklık $x_i (°C)$
73	5
65	90
64	205
55	297
50	407
41	503
40	608
$\sum y_i = 388$	$\sum x_i = 2115$

$$y_m = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{388}{7} = 55,43$$

korelasyon denklemi ise

şeklindedir.

i	y _i	(y _i -y _m) ²	y _{ic}	(y _i -y _{ic}) ²
1	73	308,70	72,24	0,581
2	65	91,58	67,44	5,929
3	64	73,44	60,94	9,379
4	55	0,185	55,74	0,739
5	50	29,48	49,52	0,226
6	41	208,22	44,10	9,613
7	40	238,08	38,17	1,832
		Σ=949,71		Σ=28,299

Tablo yardımıyla,

$$\sigma_y = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_m)^2}{n-1} \right]^{1/2} = \left[\frac{949,71}{7-1} \right]^{1/2} = 12,58$$

$$\sigma_{y,x} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{ic})^2}{n-2} \right]^{1/2} \left[\frac{28,299}{7-2} \right]^{1/2} = 2,379$$

Buradan korelasyon katsayısı;

$$r = \left[1 - \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_y^2} \right]^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{2,379}{12,58} \right)^2 \right]^{1/2} = 0,982$$

