

ISI İLETİMİ GENEL DENKLEMİ

Hazırlayan

Prof.Dr. Muhammet KAYFECİ

Kaynaklar

Afshin J. Ghajar, Yunus A. ÇENGEL, Isı ve Kütle Transferi, Palme Yayınevi, Türkçe Çeviri, 2015.

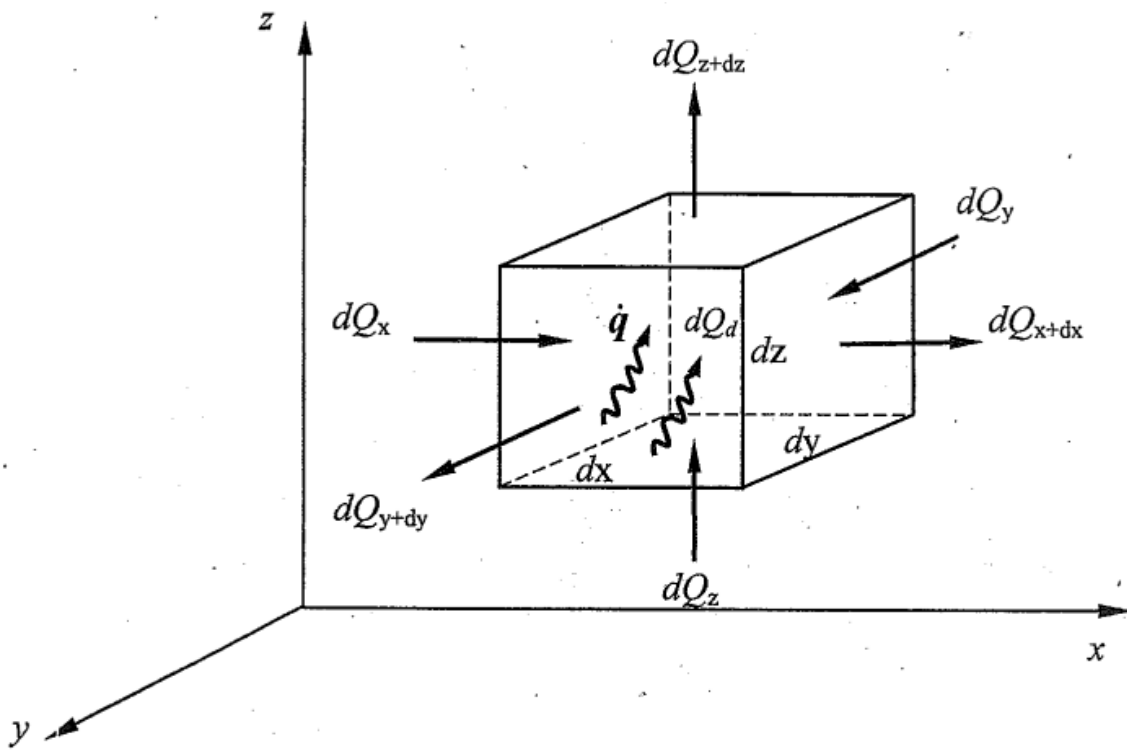
Fethi HALICI, Mehmet GÜNDÜZ, Örneklerle Isı Geçişi Isı transferi, Birsen Yayınevi, 2010.

Adrienne S. Lavine, David P. DeWitt, Frank P. Incropera, Theodore L.Bergman, Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri, Palme Yayıncılık, Türkçe Çeviri, 2015

KARTEZYEN KOORNİNATLAR

Burada, en genel halde üç boyutlu dikdörtgen koordinatlarda, katı cisim içindeki sıcaklık dağılımını veren diferansiyel denklem çıkartılarak bazı özel şartlar altında çözümleri verilmiştir. Şekil 3.1'de gösterildiği gibi düzlem duvar halindeki katı cisim içinde, diferansiyel kontrol hacim elemanı alınarak, aşağıdaki kabullere göre çözüm yapılmıştır.

1. Isı iletimi zamana göre değişiyor.
2. Katı cisim içinde ısı üretiliyor, (katı cisim içinden elektrik akımı geçmesi yada kimyasal reaksiyonlar v.b. işlemler sonucu ısı enerjisinin açığa çıkması hali gibi)
3. Isı iletimi üç boyutlu
4. Katı cisim içinde ısı depo ediliyor.
5. Özellikler sabit
6. Cisim homojen ve izotropik



$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

$$\dot{q}_{\text{ü}} = q dx dy dz$$

$$\dot{q}_d = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

$$Q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$Q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -k \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$q = -k \nabla T = -k \left(i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z}$$

Termodinamiğin I. kanununa göre kontrol hacim elemanındaki enerji dengesi:

Giren ısı enerjisi + Üretilen ısı enerjisi = Çıkan ısı enerjisi + Depo edilen ısı enerjisi

Gerekli bağıntılar yerlerine konulur ve ara işlemler yapılırsa, dikdörtgen koordinatlardaki sıcaklık dağılımının, diğer bir adıyla ısı iletiminin genel diferansiyel denklemi,

$$\dot{q}_g + \dot{q}_{\dot{u}} - \dot{q}_{\dot{c}} = \dot{q}_d$$

$$q_x + q_y + q_z + q_x + \dot{q}dxdydz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Birimi [m²/s] dir. Denk. (3.1) **Laplace** operatörü kullanılarak,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho c}$$

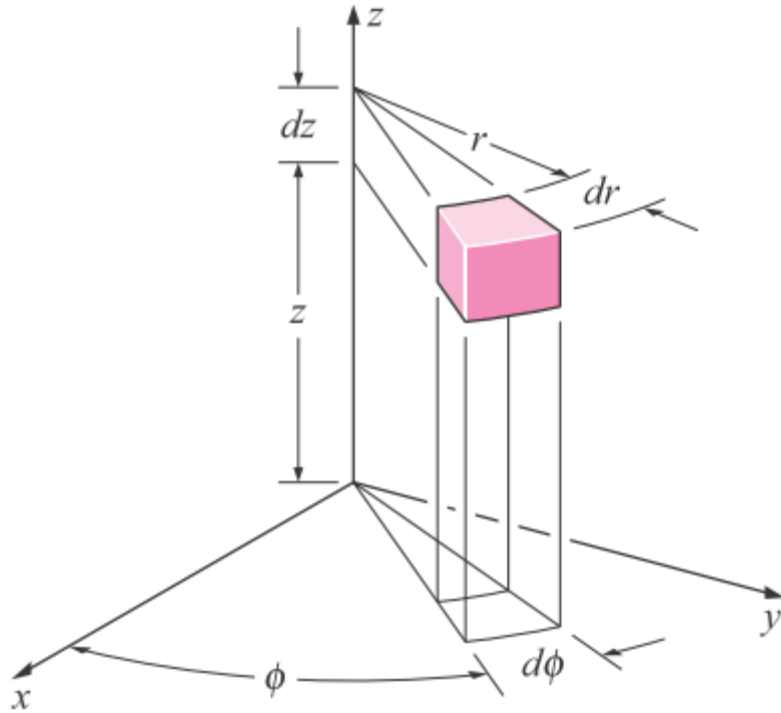
- (1) *Steady-state:*
(called the **Poisson equation**)
- (2) *Transient, no heat generation:*
(called the **diffusion equation**)
- (3) *Steady-state, no heat generation:*
(called the **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

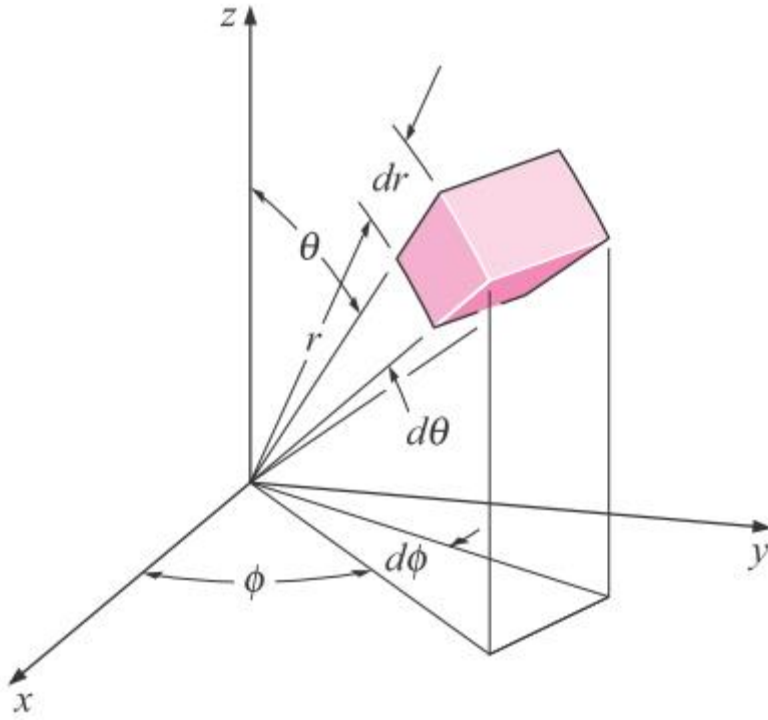
Silindirik Koordinatlarda



$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \text{and} \quad z = z$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(kr \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Küresel Koordinatlarda



$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad \text{and} \quad z = r \cos \theta$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

2.1. DÜZLEM DUVARDA ISI İLETİMİ

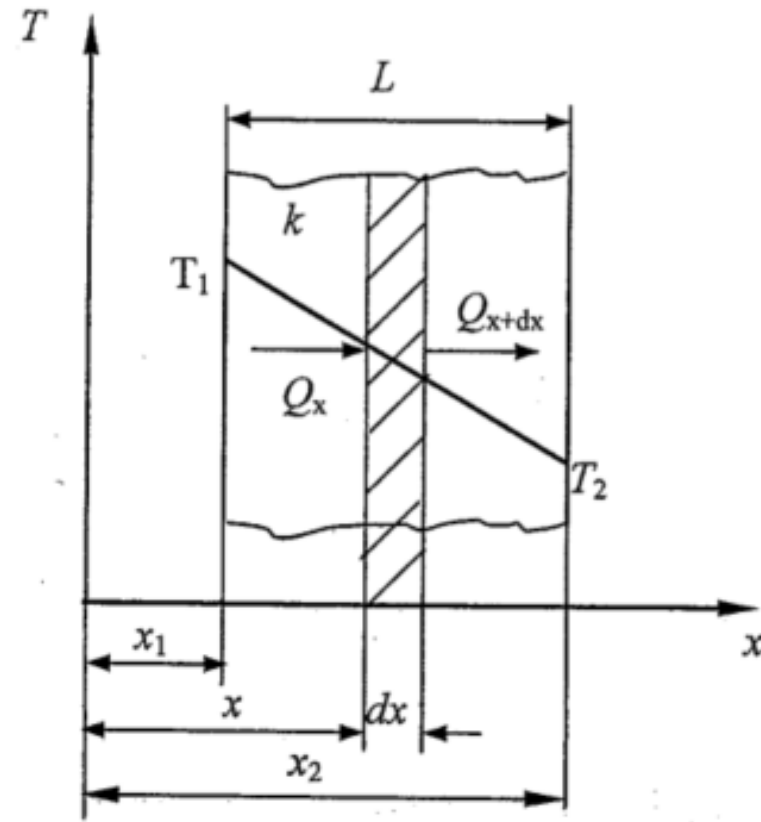
- Isı iletiminin en basit şeklini içeren düzlem duvar hali, uygulamada en çok kullanılan tiptir. Konutlardaki ısı kaybı hesabı, fırın duvarlarının ve soğuk hava depolarının ısı yalıtımı gibi konular buna en iyi örnektir.
- Burada, göz önüne alınan L kalınlığındaki düzlem duvar içindeki sıcaklık dağılımı ve duvar yüzeyleri arasında, birim zamanda geçen ısı miktarı hesaplanacaktır.
- Düzlem duvarın x_1 uzunluğundaki yüzey sıcaklığı T_1 , x_2 uzunluğundaki yüzey sıcaklığı T_2 ve $T_2 > T_1$ olsun.

Problemi çözmek için takip edilecek yol aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Levha içinde diferansiyel bir kontrol hacim elemanı seçilir.
- Bu kontrol hacim elemanı üzerine ısı iletimi ve termodinamiğin birinci kanunu uygulanarak, sıcaklık dağılımı için diferansiyel denklem elde edilir.
- Bulunan diferansiyel denklem sınır şartlara göre çözülerek, levha içindeki sıcaklık dağılımı bulunur.
- Bu sıcaklık dağılımı Fourier ısı iletim kanununa uygulanarak-, iletim ile geçen ısı miktarı hesaplanır.

Yapılan Kabuller:

1. Özellikler sabit ($k=sbt.$)
2. Isı geçiři bir boyutlu (x yönü)
3. Devamlı hal
4. Isı üretimi yok



Şekil 2.1. Düzlem duvarda sıcaklık dağılımı.

$$Q_x - Q_{x+dx} = 0 \quad (2.1)$$

Burada Q_x , x mesafesinde kontrol hacim elemanına giren ısı enerjisi, Q_{x+dx} ise $x+dx$ mesafesinde kontrol hacim elemanım terk eden ısı enerjisidir.

Taylor serisine açılırsa ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse;

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx$$

eşitliği yazılabilir. Bu bağıntı denk. (2.1) de yerine konulursa,

$$Q_x - Q_x - \frac{dQ_x}{dx} dx = 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan da,

$$\frac{dQ_x}{dx} dx = 0$$

bağıntısı bulunur. Bu çarpımın sıfır olabilmesi için çarpanlarından en az birinin sıfır olması gerekir. dx diferansiyel hacim elemanının genişliği olduğundan, sıfır olamaz (dx≠0) o halde;

$$\frac{dQ_x}{dx} = 0 \tag{2.2}$$

olmalıdır. Bu ifadeye göre devamlı rejimde birim zamanda geçen ısı miktarı sabittir. Denklem (2.2), Fourier ısı iletim kanununun x'e göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi demektir.

Denklem (1.1) den Fourier ısı iletim kanunu,

$$Q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

idi, bu bağıntının x 'e göre türevi alınır,

$$\frac{dQ_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-kA \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

bulunur. Buradan da sıcaklık dağılımının diferansiyel denklemi,

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. İkinci mertebeden olan bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.4)$$

olur. C_1 ve C_2 integral sabitleri, sınır şartları yardımı ile bulunur.

Sınır şartlar,

$$x = x_1 \Rightarrow T = T_1$$

$$x = x_2 \Rightarrow T = T_2$$

dir. Bu sınır şartlara göre denk(2.4) den,

$$T_1 = C_1 x_1 + C_2$$

$$T_2 = C_1 x_2 + C_2$$

bulunur. Bu iki denklemden integral sabitleri;

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} = -\frac{\Delta T}{L} \quad ; \quad C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} x_1 = T_1 + \frac{\Delta T}{L} x_1$$

bulunur. Burada $\Delta T = T_1 - T_2$ ve $L = x_2 - x_1$ dir. C_1 ve C_2 sabitleri denklem (2.4) de yerlerine yazılırsa, düzlem duvar içindeki sıcaklık dağılımı için;

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (2.5)$$

bağıntısı, yada düzlem duvar T eksenine bitişik ($x_1=0$) ise,

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L}x$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdan görüldüğü gibi, sıcaklık dağılımı doğrusaldır. Bu bağıntı yardımı ile duvar içindeki herhangi bir noktadaki sıcaklık bulunabilir.

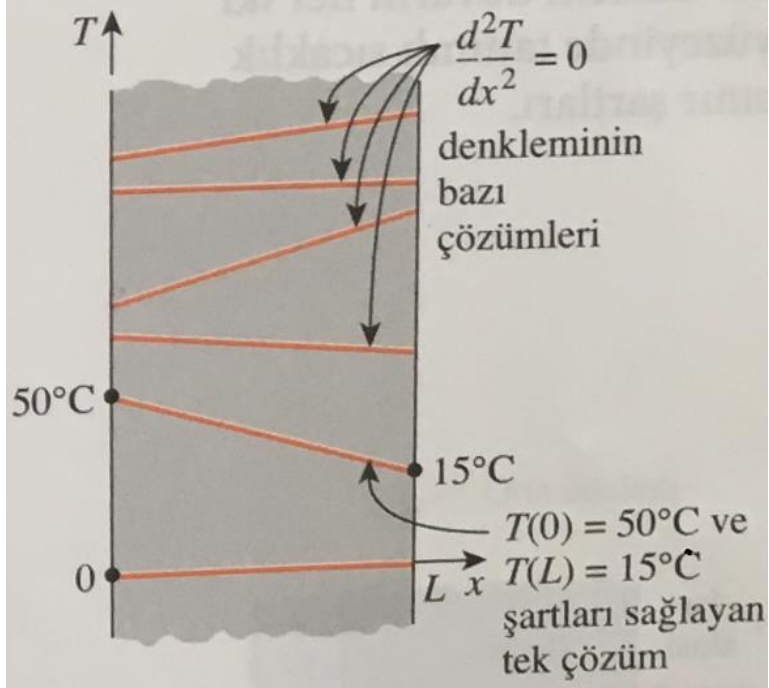
Denk.(2.5) de elde edilen sıcaklık dağılımının x 'e göre türevi alınıp, Fourier ısı iletim kanununda yerine konulursa, düzlem duvarda iletimle geçen ısı miktarı için aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$Q_x = k A \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (2.6)$$

SINIR VE BAŞLANGIÇ ŞARTLARI

- Yukarıda verilen ısı iletim denklemleri ortam içinde bir diferansiyel eleman üzerinde enerji dengesi kullanılarak türetilmişlerdir ve ortamın yüzden deki ısı şartlara bakılmaksızın aynı kalırlar.
- Yani bu diferansiyel denklemler yüzey sıcaklığı veya tanımlı ısı akışı gibi yüzey şartlarına ilişkin herhangi bir bilgiyi içermezler. Fakat ortamdaki ısı akışının ve sıcaklık dağılımının yüzeydeki şartlara bağlı olduğu bilinmektedir ve bir ortamdaki ısı transfer probleminin tanımı, ortamı sınırlayan yüzeylerdeki ısı şartlar tam olarak tarif edilmeden tamam olmaz.
- Sınırlardaki ısı şartların matematik ifadeleri sınır şartları olarak adlandırılır.
-
- Matematik açısından bir diferansiyel denklemin çözümü, esasında bir türev alma veya bir integrasyon işlemidir ve dolayısıyla bir diferansiyel denklemin çözümü tipik gelişigüzel sabitler içerir (Şekil).

- Bir probleme tek bir çözüm elde etmek için ana diferansiyel denklemden daha fazlasına ihtiyaç vardır.
- Bağımsız değişkenin bazı değerlerine karşılık fonksiyon veya türev değerleri olarak bazı sınır şartlarının belirlenmesi gerekir; öyle ki bu şartlar çözümü belirli noktalarda sağlanmaya zorlayarak gelişigüzel sabitler için özgün değerler ve dolayısıyla bir özgün çözüm verir.
- Fakat ek bilgi ve şartlar diferansiyel denklemin içinde ifade edecek bir yer olmadığı için, bunların sınır veya başlangıç şartları şeklinde ayrıca verilmesi gerekir.



Diferansiyel denklem:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Genel çözüm:

$$T(x) = C_1x + C_2$$

Gelişigüzel sabitler

Bazı özel çözümler:

$$T(x) = 2x + 5$$

$$T(x) = -x + 12$$

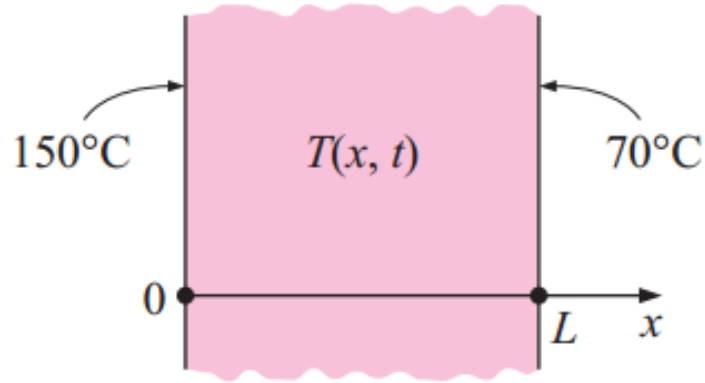
$$T(x) = -3$$

$$T(x) = 6.2x$$

$$\vdots$$

1.Tanımlı Sıcaklık Sınır Şartı

- Bir yüzeye uygulanan sıcaklık genellikle doğrudan ve kolayca ölçülebilir. Bu yüzden, bir yüzeydeki ısı şartları tanımlamanın en kolay yollarından biri sıcaklığı tanımlamaktır. Mesela, L kalınlıklı bir düzlem duvarda tek boyutlu ısı iletimi için tanımlı sıcaklık sınır şartları,



$$T(0, t) = T_1$$

$$T(L, t) = T_2$$

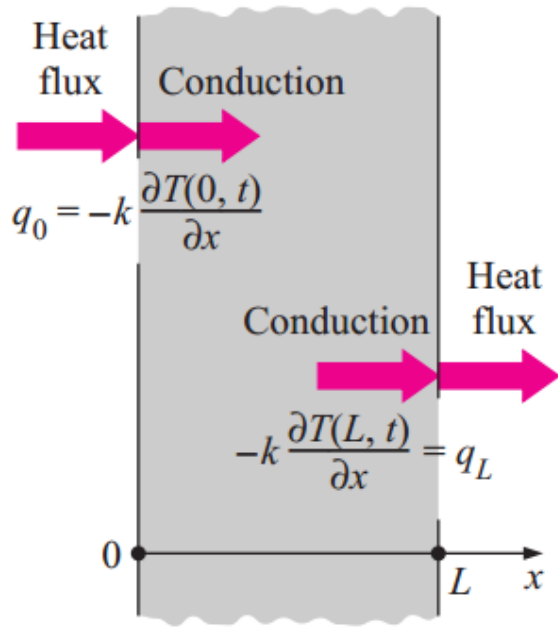
$$T(0, t) = 150^\circ\text{C}$$

$$T(L, t) = 70^\circ\text{C}$$

2.Tanımlı Isı Akışı Sınır Şartı

Bir yüzeyde enerji etkileşimleri hakkında yeterli bilgi olduğu zaman, o yüzeydeki ısı transfer hızını ve dolayısıyla q akışını (birim yüzey alanı başına ısı transfer hızı, W/m^2) belirlemek mümkün olabilir ve bu bilgi sınır şartlarından biri olarak kullanılabilir. Sınırlar dahil olmak üzere ortamın herhangi bir yerinde pozitif x yönünde ısı akışı Fourier ısı iletim kanunu ile şöyle ifade;

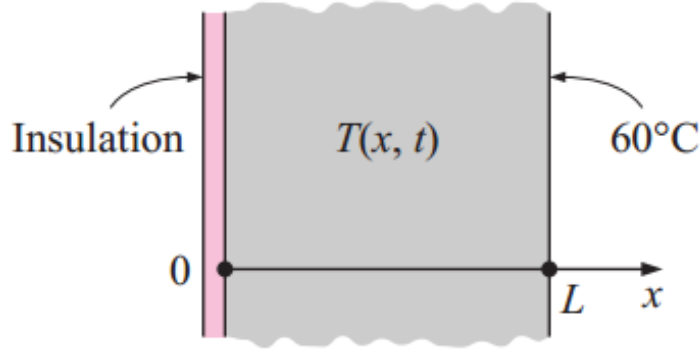
$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = \left(\begin{array}{c} \text{Heat flux in the} \\ \text{positive } x\text{-direction} \end{array} \right) \quad (W/m^2)$$



$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 50 \quad \text{and} \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = -50$$

Özel Durum: Yalıtımlı Sınır

Uygulamada bazı yüzeyler ısı kaybını (veya ısı kazancını) azaltmak için çoğunlukla yalıtılırlar. Yalıtım ısı transfer hızını azaltır; fakat kalınlığı sonsuz olmadıkça ısı geçişini tamamen engelleyemez. Bununla birlikte, iyice yalıtılmış bir yüzeyden olan ısı transferi sıfır olarak alınabilir; çünkü yeterli yalıtım, bir yüzeydeki ısı transfer hızını ihmâl edilebilir düzeylere indirir. Bu yüzden iyi yalıtılmış bir yüzey, tanımlı ısı akışı sıfır olan bir yüzey olarak modellenenebilir. Bu durumda mükemmel yalıtılmış bir yüzeyde (mesela, $x = 0$ da) sınır şartı şöyle tanımlanabilir:



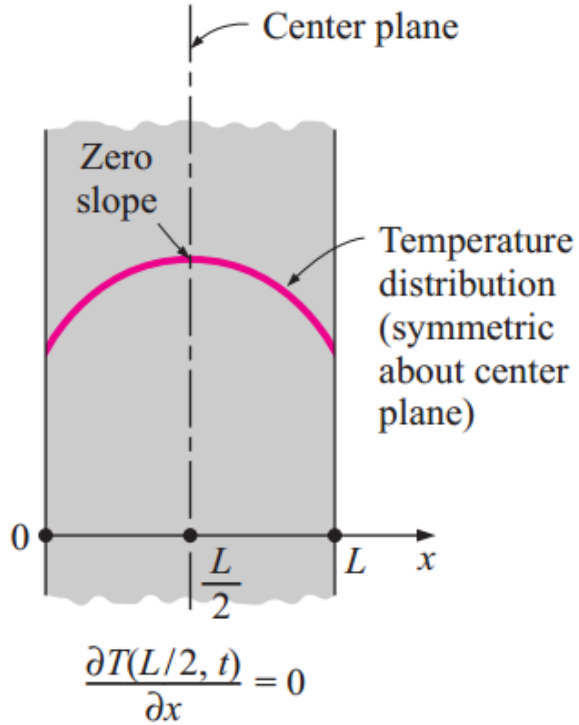
$$k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$
$$T(L, t) = 60^\circ\text{C}$$

Yani yalıtımlı bir yüzeyde, sıcaklığın yalıtımlı yüzeye dik doğrultudaki yerel değişkene göre birinci türevi (sıcaklık gradyanı) sıfırdır. Bu, yüzeyde sıcaklık eğiminin sıfır olması gerektiği için, sıcaklık fonksiyonunun yalıtılmış yüzeye dik olması gerektiği anlamına da gelir.

Özel Durum: Isıl Simetri

Etkiyen ısı şartlarıdaki simetrinin bir sonucu olarak, bazı ısı transfer problemleri ısı simetriye sahiptirler. Mesela, havada düşey biçimde asılı L kalınlıklı geniş bir plakanın iki yüzeyi aynı ısı şartlarına açıktır ve dolayısıyla plakanın bir yarısındaki sıcaklık dağılımı diğer yarısındaki sıcaklık dağılımı ile aynı olur. Yani bu plakadaki ısı transfer problemi, $x = L/2$ merkez düzlemine göre ısı simetriye sahip olur. Ayrıca, plakada herhangi bir noktada ısı akışının yönü, bu noktaya daha yakın yüzeye doğru olur ve orta düzlemin üzerinden ısı akışı olmaz. Bundan dolayı, orta düzlem yalıtılmış yüzey gibi görülebilir; bu simetri düzlemindeki ısı şartlar,



$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$

Örnek: Bir elektrik ocağında, sığır etinden güveç pişirmek için kullanılan bir alüminyum tencereyi göz önüne alınız. $D = 20$ cm çaplı tencerenin taban kalınlığı $L = 0,3$ cm 'dir. Ocağın üstündeki elektrikli ısıtıcı ünitesi pişirme işlemi süresince 800 W 'lık güç tüketmekte olup ısıtıcı elemanda üretilen ısıнын %90 tencereye transfer edilmektedir. Sürekli işlem süresince tencerenin iç yüzeyinin sıcaklığı 110°C olarak ölçülmüştür. Bu pişirme işlemi süresince tencerenin taban kısmı için sınır şartlarını ifade ediniz.

$$-k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0$$

$$\dot{q}_0 = \frac{\text{Isı transferi hızı}}{\text{Alt yüzey alanı}} = \frac{0.720 \text{ kW}}{\pi(0.1 \text{ m})^2} = 22.9 \text{ kW/m}^2$$

olur. Tencere tabanının iç yüzeyindeki sıcaklık 110°C olarak tanımlanmıştır. Böylece bu yüzeydeki sınır şartı şöyle yazılabilir:

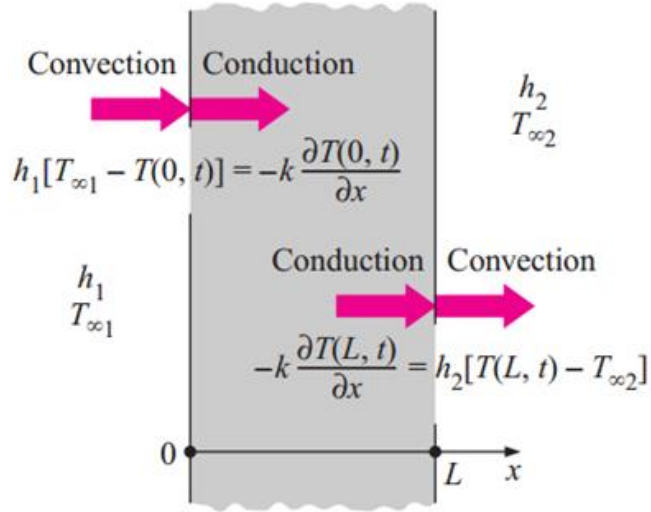
$$T(L) = 110^{\circ}\text{C}$$

burada $L = 0,003$ m 'dir.

3. Taşınım Sınır Şartı

Taşınım, belki de uygulamada en sık karşılaşılan sınır şartıdır; çünkü çoğu ısı transfer yüzeyleri sıcaklığı tanımlı bir ortama açıktır. Taşınım sınır şartı bir yüzey enerji dengesi esas alınarak şöyle yazılır:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Seçilen bir} \\ \text{doğrultuda} \\ \text{yüzeyde ısı iletimi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Aynı doğrultuda} \\ \text{yüzeyde ısı} \\ \text{taşınımı} \end{array} \right)$$



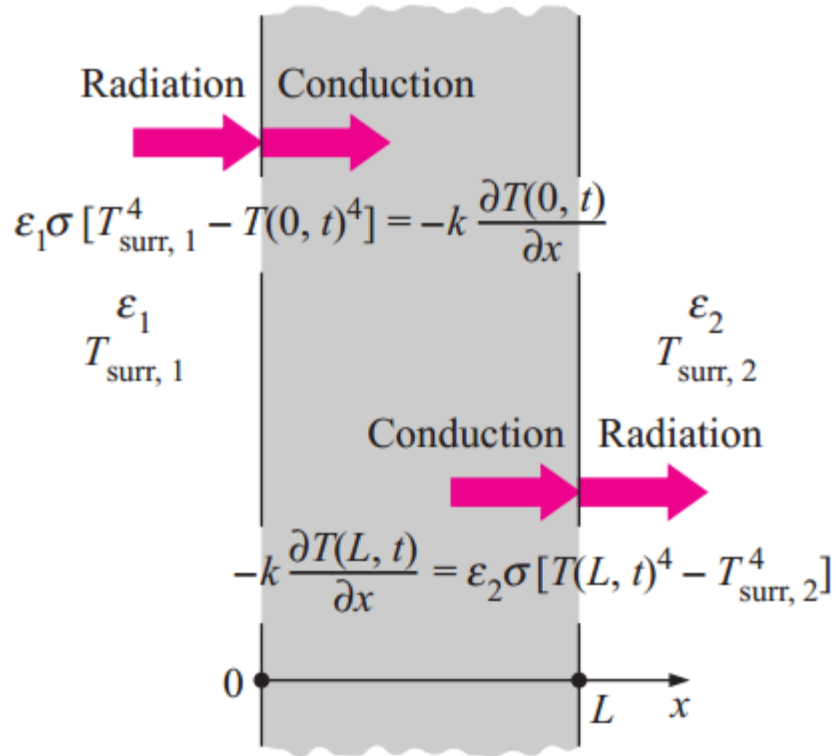
L kalınlıklı bir düzlem duvarda x yönünde tek boyutlu ısı transferi için her iki yüzeyde taşınım sınır şartları,

$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h_1 [T_{\infty 1} - T(0, t)]$$

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h_2 [T(L, t) - T_{\infty 2}]$$

4. Işınım Sınır Şartı

Uzay ve kriyojenik uygulamalarda görülenlere benzer bazı durumlarda, bir ısı transfer yüzeyi, vakumlu bir boşlukla çevrilidir ve dolayısıyla bir yüzey ve çevre ortam arasında taşımınla ısı transferi meydana gelmez. Böyle durumlarda ışıınım, dikkate alınan yüzey ile çevresi arasında yegâne ısı transfer mekanizması olur. Enerji dengesi kullanılarak bir yüzeydeki ışıınım sınır şartı,

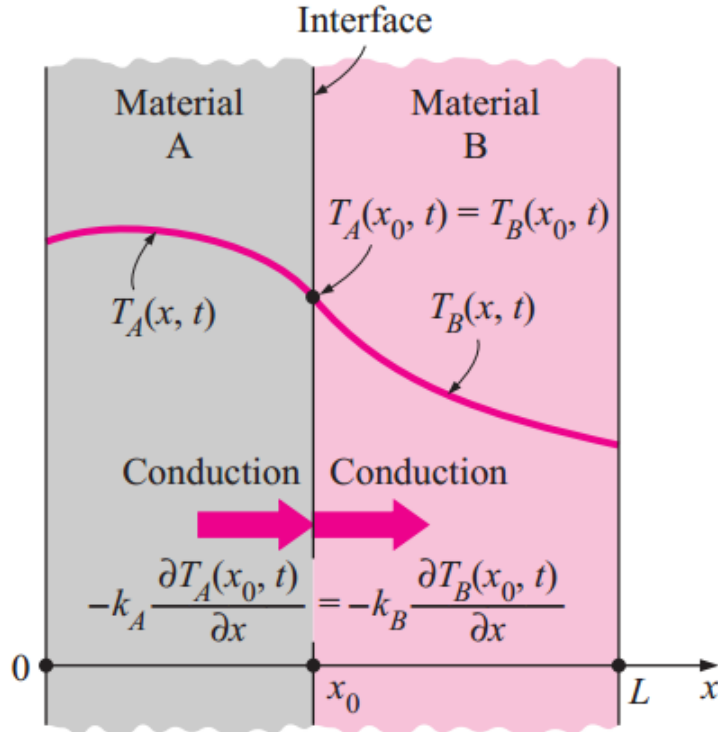


$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \varepsilon_1 \sigma [T_{\text{surr}, 1}^4 - T(0, t)^4]$$

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = \varepsilon_2 \sigma [T(L, t)^4 - T_{\text{surr}, 2}^4]$$

5. Arayüzey Sınır Şartları

- Bazı cisimler farklı malzeme tabakalarından oluşmuşlardır; böyle bir ortamda bir ısı transfer probleminin çözümü, her bir tabakadaki ısı transfer probleminin çözümünü gerektirir. Bu, sırasıyla her bir ara yüzeyde sınır şartlarının tanımlanmasını gerektirir.
-
- Bir ara yüzeydeki sınır şartları şu şartlar esas alınarak belirlenir: (1) Temas halindeki iki cisim, temas alanında ayrıt sıcaklığa sahip olmalıdır ve (2) Bir arayüzey -ki bir yüzeydir- herhangi bir enerji depolayamaz ve dolayısıyla arayüzeyin her iki tarafındaki ısı akısı aynı olmalıdır. $x = x_0$ 'da mükemmel temas halindeki A ve B cisimlerinin arayüzeydeki sınır şartları (Şekil),



$$T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t)$$

$$-k_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x}$$

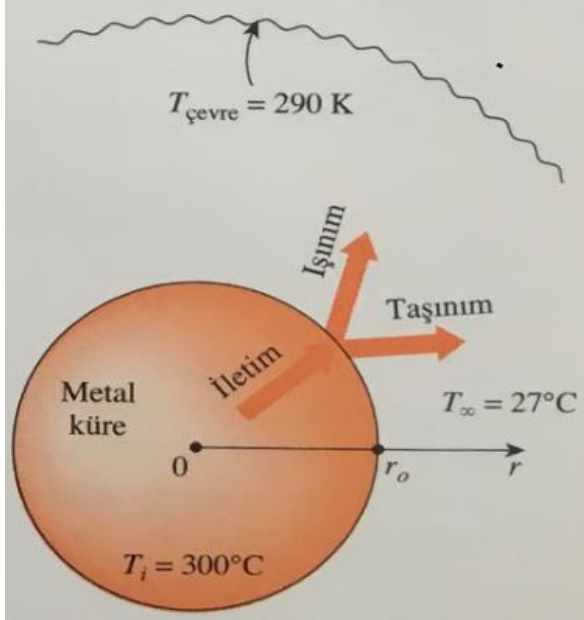
6. Genelleşmiş Sınır Şartları

Şimdiye kadar basit olsun diye tanımlı ısı akışı, taşınım veya ışıınım gibi tek tür ısı transferinin olduğu yüzeyler dikkate alındı. Ancak bir yüzey genellikle aynı anda taşınım, ışıınım ve tanımlı ısı akışı içerebilir. Böyle durumlarda sınır şartları yine aşağıda ifade edildiği gibi bir yüzey enerji dengesi ile elde edilir.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Yüzeye olan} \\ \text{her tür} \\ \text{ısı transferi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Yüzeyden olan} \\ \text{her tür} \\ \text{ısı transferi} \end{array} \right)$$

Birleşik Taşınım ve Işınım Şartı

Şekilde görüldüğü gibi, r_o yarıçapındaki metal bir küre 300°C 'lik bir fırında ısıtıldıktan sonra çıkartılıp $T_\infty = 27^\circ\text{C}$ 'lik ortam havasında soğumaya bırakılmıştır. Küre malzemesinin ısıl iletkenliği $k = 14,4 \text{ W/mK}$, kürenin dış yüzeyinde ortalama taşınım ısı transfer katsayısı $h = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'dır. Kürenin dış yüzeyinin yayıcılığı $\varepsilon = 0,6$ ve çevreleyen yüzeyin ortalama sıcaklığı ise $T_{\text{çevre}} = 290 \text{ K}$ 'dir. Kürenin, bütün dış yüzeyinden üniform olarak soğuduğunu kabul ederek soğuma işlemi için başlangıç ve sınır şartlarını bulunuz.



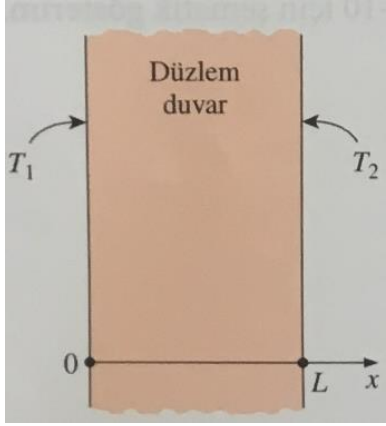
$$T(r, 0) = T_i = 300^\circ\text{C}$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0$$

$$-k \frac{\partial T(r_o, t)}{\partial r} = h[T(r_o) - T_\infty] + \varepsilon\sigma[T(r_o)^4 - T_{\text{çevre}}^4]$$

ÖRNEK: Bir Düzlem Duvarda Isı İletimi

Isıl iletkenliği $k = 1,2 \text{ W/mK}$, yüzey alanı $A = 15 \text{ m}^2$ ve kalınlığı $L = 0.2 \text{ m}$ olan geniş bir düzlem duvarı göz önüne alın. Şekilde görüldüğü gibi, duvarın iki yüzeyi sırasıyla $T_1 = 120^\circ\text{C}$ ve $T_2 = 50^\circ\text{C}$ sabit sıcaklıklarında tutulmaktadır, (a) Duvar içindeki sıcaklık dağılımı ile $x = 0,1 \text{ m}$ 'deki duvar sıcaklığını ve (b) sürekli şartlarda duvar içindeki ısı iletim hızını hesaplayınız.



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$\begin{aligned} T(0) &= T_1 = 120^\circ\text{C} \\ T(L) &= T_2 = 50^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Differential equation:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Integrate:

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

Integrate again:

$$T(x) = C_1x + C_2$$

General solution Arbitrary constants

a)

$$T(0) = C_1 \times 0 + C_2 \rightarrow C_2 = T_1$$

$$T(L) = C_1L + C_2 \rightarrow T_2 = C_1L + T_1 \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

$$T(0.1 \text{ m}) = \frac{(50 - 120)^\circ\text{C}}{0.2 \text{ m}} (0.1 \text{ m}) + 120^\circ\text{C} = \mathbf{85^\circ\text{C}}$$

b)

$$\dot{Q}_{\text{wall}} = -kA \frac{dT}{dx} = -kAC_1 = -kA \frac{T_2 - T_1}{L} = kA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = (1.2 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C})(15 \text{ m}^2) \frac{(120 - 50)^\circ\text{C}}{0.2 \text{ m}} = \mathbf{6300 \text{ W}}$$

Örnek: Kalınlığı $L = 0,4 \text{ m}$, ısı iletkenliği $k = 2,3 \text{ W/mK}$ ve yüzey alanı $A = 30 \text{ m}^2$ olan geniş bir düzlem duvarı göz önüne alın. Duvarın sol tarafı $T_1 = 90^\circ\text{C}$ sabit sıcaklıkta tutulurken, sağ tarafı $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ sıcaklıktaki çevre havasına $h = 24 \text{ W/m}^2\text{K}$ ısı transfer katsayısı ile ısı kaybetmektedir. Duvarda ısı üretimi olmadığını ve ısı iletkenliğinin sabit olduğunu kabul ederek,

- duvar içinden sürekli tek boyutlu ısı iletimi için geçerli diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını tanımlayınız,
- diferansiyel denklemi çözerek duvardaki sıcaklık değişimi için bir bağıntı türetin ve
- duvardan olan ısı transfer hızını hesaplayınız?

Analysis (a) Taking the direction normal to the surface of the wall to be the x direction with $x = 0$ at the left surface, the mathematical formulation of this problem can be expressed as

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

and

$$T(0) = T_1 = 90^\circ\text{C}$$

$$-k \frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty]$$

(b) Integrating the differential equation twice with respect to x yields

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

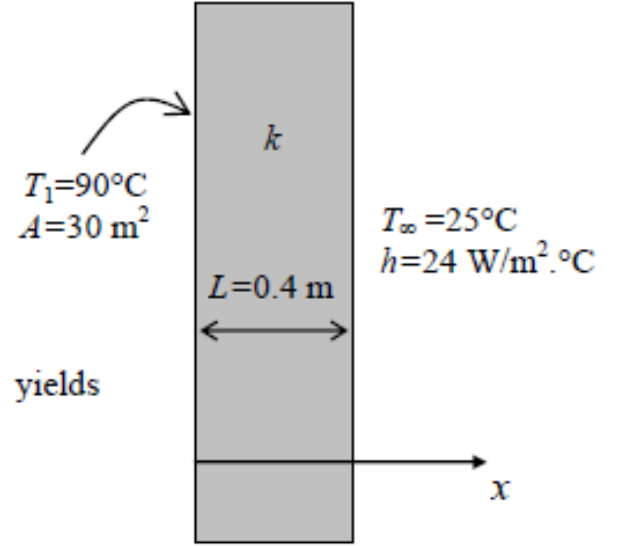
where C_1 and C_2 are arbitrary constants. Applying the boundary conditions give

$$x = 0: \quad T(0) = C_1 \times 0 + C_2 \rightarrow C_2 = T_1$$

$$x = L: \quad -kC_1 = h[(C_1 L + C_2) - T_\infty] \rightarrow C_1 = -\frac{h(C_2 - T_\infty)}{k + hL} \rightarrow C_1 = -\frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL}$$

Substituting C_1 and C_2 into the general solution, the variation of temperature is determined to be

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL} x + T_1 \\ &= -\frac{(24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(90 - 25)^\circ\text{C}}{(2.3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}) + (24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.4 \text{ m})} x + 90^\circ\text{C} \\ &= 90 - 131.1x \end{aligned}$$



(c) duvardan olan ısı transfer hızını hesaplayınız?

(c) The rate of heat conduction through the wall is

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{\text{wall}} &= -kA \frac{dT}{dx} = -kAC_1 = kA \frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL} \\ &= (2.3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C})(30 \text{ m}^2) \frac{(24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(90 - 25)^\circ\text{C}}{(2.3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}) + (24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.4 \text{ m})} \\ &= 9045 \text{ W}\end{aligned}$$

Note that under steady conditions the rate of heat conduction through a plain wall is constant.

Örnek: Isıl iletkenliği $k = 20 \text{ W/mK}$, taban alanı $A = 160 \text{ cm}^2$ ve kalınlığı $L = 0,6 \text{ cm}$ olan 800 W 'lık bir ütünün taban plaka sını göz önüne alınız. Taban plakasının iç yüzeyinde içerideki direnç teli yardımıyla üretilen üniform ısı akışı vardır. Sürekli işlem şartlarına ulaşıldığında plakanın dış yüzeyinin sıcaklığı 85°C olarak ölçülmüştür. ütünün üst kısmından olan ısı kaybını ihmal ederek; (a) plakadaki sürekli tek boyutlu ısı iletimi için geçerli diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını belirleyiniz?

$$\dot{q}_0 = \frac{\dot{Q}_0}{A_{\text{base}}} = \frac{800 \text{ W}}{160 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 50,000 \text{ W/m}^2$$

Taking the direction normal to the surface of the wall to be the x direction with $x = 0$ at the left surface, the mathematical formulation of this problem can be expressed as

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

and
$$-k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 = 50,000 \text{ W/m}^2$$

$$T(L) = T_2 = 85^\circ\text{C}$$

(b) Integrating the differential equation twice with respect to x yields

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T(x) = C_1x + C_2$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants. Applying the boundary conditions give

$$x = 0: \quad -kC_1 = \dot{q}_0 \rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$$

$$x = L: \quad T(L) = C_1L + C_2 = T_2 \rightarrow C_2 = T_2 - C_1L \rightarrow C_2 = T_2 + \frac{\dot{q}_0L}{k}$$

Substituting C_1 and C_2 into the general solution, the variation of temperature is determined to be

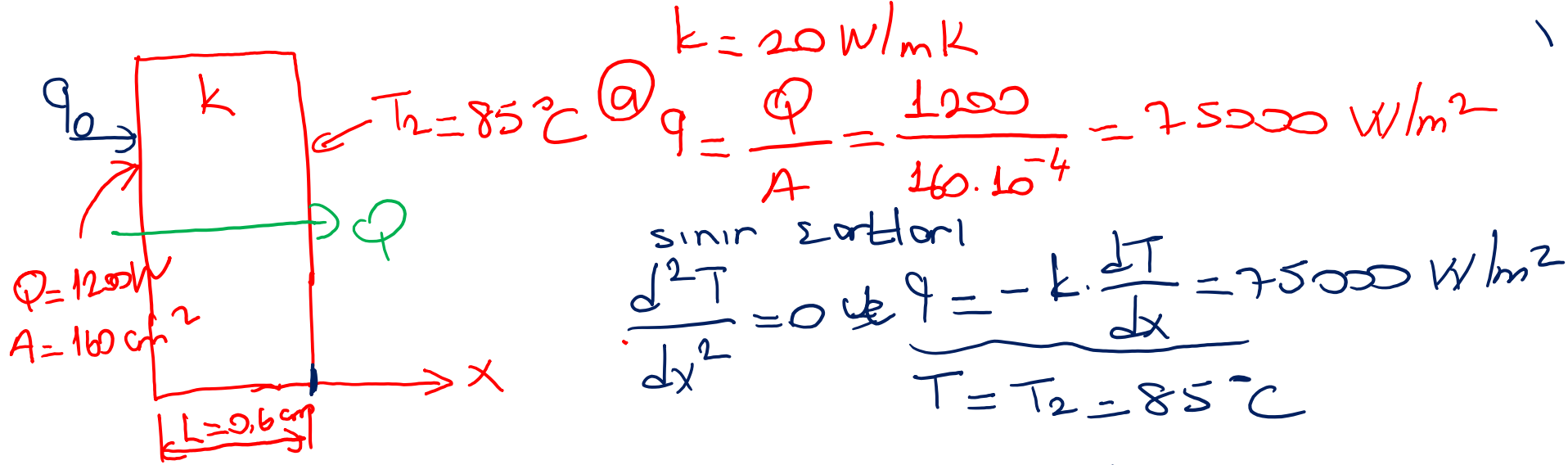
$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{\dot{q}_0}{k}x + T_2 + \frac{\dot{q}_0L}{k} = \frac{\dot{q}_0(L-x)}{k} + T_2 \\ &= \frac{(50,000 \text{ W/m}^2)(0.006 - x)\text{m}}{20 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} + 85^\circ\text{C} \\ &= 2500(0.006 - x) + 85 \end{aligned}$$

(c) The temperature at $x = 0$ (the inner surface of the plate) is

$$T(0) = 2500(0.006 - 0) + 85 = \mathbf{100^\circ\text{C}}$$

Örnek: Kalınlığı $L = 0,6 \text{ cm}$, ısı iletkenliği $k = 20 \text{ W/mK}$ ve yüzey alanı $A = 160 \text{ cm}^2$ olan geniş bir düzlem duvarı göz önüne alın. Duvarın sol tarafında 1200 W sürekli ısı varken sağ tarafında $T_2 = 85^\circ\text{C}$ sabit sıcaklıktadır. Duvarda ısı üretimi olmadığını ve ısı iletkenliğinin sabit olduğunu kabul ederek,

- Duvar içinden sürekli tek boyutlu ısı iletimi için geçerli diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını tanımlayınız,
- Diferansiyel denklemi çözerek duvardaki sıcaklık değişimi için bir bağıntı türetin ve
- Duvarın sol yüzeyindeki sıcaklığı hesaplayınız?



$$b) \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

sinir şartlarından

$$x=0 \quad -k \cdot \frac{dT}{dx} = q \Rightarrow -k \cdot C_1 = q \Rightarrow C_1 = -\frac{q}{k}$$

$$x=L \Rightarrow T=T_2 \Rightarrow T_2 = C_1 \cdot L + C_2 \Rightarrow \underline{C_2 = T_2 - C_1 \cdot L}$$

$$C_2 = T_2 - C_1 \cdot L = T_2 + \frac{q}{k} \cdot L$$

$$L = 0,6 \text{ cm} = 0,006 \text{ m}$$

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$T(x) = -\frac{q}{k} \cdot x + T_2 + \frac{q}{k} \cdot L = \boxed{\frac{q(L-x)}{k} + T_2}$$

$$T(x) = \frac{75000 \cdot (0,006 - x)}{20} + 85 \Rightarrow T(x) = 3750 (0,006 - x) + 85$$

c) $x=0$ 'do

$$T(0) = 3750 (0,006 - 0) + 85 = \underline{\underline{107,5^\circ \text{C}}}$$

(b) Integrating the differential equation twice with respect to x yields

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T(x) = C_1x + C_2$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants. Applying the boundary conditions give

$$x = 0: \quad -kC_1 = \dot{q}_0 \rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$$

$$x = L: \quad T(L) = C_1L + C_2 = T_2 \rightarrow C_2 = T_2 - C_1L \rightarrow C_2 = T_2 + \frac{\dot{q}_0L}{k}$$

Substituting C_1 and C_2 into the general solution, the variation of temperature is determined to be

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{\dot{q}_0}{k}x + T_2 + \frac{\dot{q}_0L}{k} = \frac{\dot{q}_0(L-x)}{k} + T_2 \\ &= \frac{(75,000 \text{ W/m}^2)(0.006-x)\text{m}}{20 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}} + 85^\circ\text{C} \\ &= 3750(0.006-x) + 85 \end{aligned}$$

(c) The temperature at $x = 0$ (the inner surface of the plate) is

$$T(0) = 3750(0.006-0) + 85 = \mathbf{107.5^\circ\text{C}}$$