

BÖLÜM 3

BİR BOYUTLU ISI İLETİM DENKLEMİ

Hazırlayan

Prof.Dr. Muhammet KAYFECİ

Kaynaklar

Afshin J. Ghajar, Yunus A. ÇENGEL, Isı ve Kütle Transferi, Palme Yayınevi, Türkçe Çeviri, 2015.

Fethi HALICI, Mehmet GÜNDÜZ, Örneklerle Isı Geçişi Isı transferi, Birsan Yayınevi, 2010.

Adrienne S. Lavine, David P. DeWitt, Frank P. Incropera, Theodore L.Bergman, Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri, Palme Yayıncılık, Türkçe Çeviri, 2015

2.1. DÜZLEM DUVARDA ISI İLETİMİ

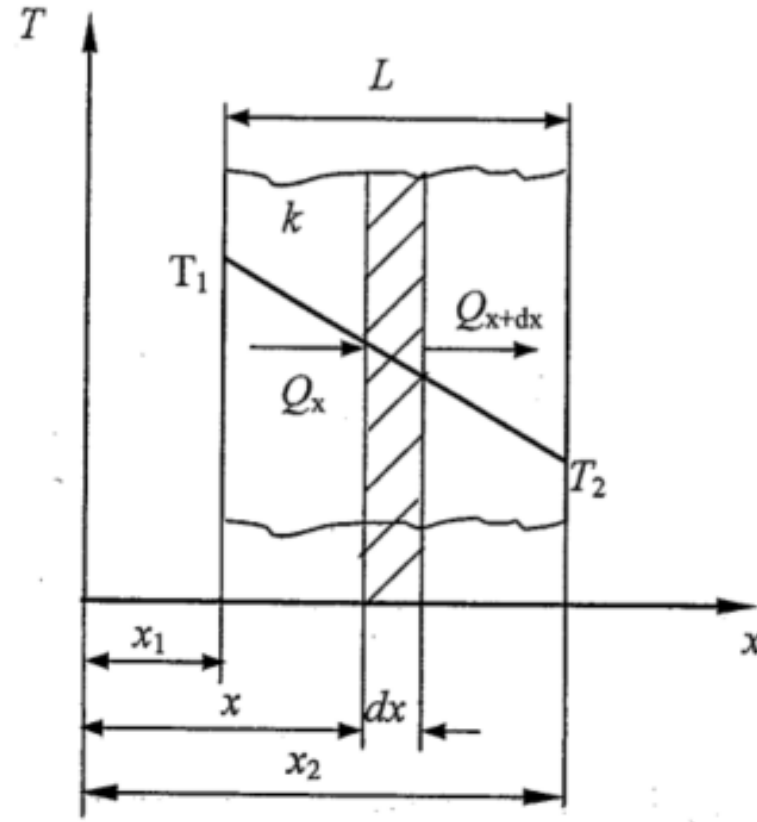
- Isı iletiminin en basit şeklini içeren düzlem duvar hali, uygulamada en çok kullanılan tiptir. Konutlardaki ısı kaybı hesabı, fırın duvarlarının ve soğuk hava depolarının ısı yalıtımı gibi konular buna en iyi örnektir.
- Burada, göz önüne alınan L kalınlığındaki düzlem duvar içindeki sıcaklık dağılımı ve duvar yüzeyleri arasında, birim zamanda geçen ısı miktarı hesaplanacaktır.
- Düzlem duvarın x_1 uzunluğundaki yüzey sıcaklığı T_1 , x_2 uzunluğundaki yüzey sıcaklığı T_2 ve $T_2 > T_1$ olsun.

Problemi çözmek için takip edilecek yol aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Levha içinde diferansiyel bir kontrol hacim elemanı seçilir.
- Bu kontrol hacim elemanı üzerine ısı iletimi ve termodinamiğin birinci kanunu uygulanarak, sıcaklık dağılımı için diferansiyel denklem elde edilir.
- Bulunan diferansiyel denklem sınır şartlara göre çözülerek, levha içindeki sıcaklık dağılımı bulunur.
- Bu sıcaklık dağılımı Fourier ısı iletim kanununa uygulanarak-, iletim ile geçen ısı miktarı hesaplanır.

Yapılan Kabuller:

1. Özellikler sabit ($k=sbt.$)
2. Isı geçişi bir boyutlu (x yönü)
3. Devamlı hal
4. Isı üretimi yok



Şekil 2.1. Düzlem duvarda sıcaklık dağılımı.

$$Q_x - Q_{x+dx} = 0 \quad (2.1)$$

Burada Q_x , x mesafesinde kontrol hacim elemanına giren ısı enerjisi, Q_{x+dx} ise $x+dx$ mesafesinde kontrol hacim elemanım terk eden ısı enerjisidir.

Taylor serisine açılırsa ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse;

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx$$

eşitliği yazılabilir. Bu bağıntı denk. (2.1) de yerine konulursa,

$$Q_x - Q_x - \frac{dQ_x}{dx} dx = 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan da,

$$\frac{dQ_x}{dx} dx = 0$$

bağıntısı bulunur. Bu çarpımın sıfır olabilmesi için çarpanlarından en az birinin sıfır olması gerekir. dx diferansiyel hacim elemanının genişliği olduğundan, sıfır olamaz (dx≠0) o halde;

$$\frac{dQ_x}{dx} = 0 \quad (2.2)$$

olmalıdır. Bu ifadeye göre devamlı rejimde birim zamanda geçen ısı miktarı sabittir. Denklem (2.2), Fourier ısı iletim kanununun x'e göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi demektir.

Denklem (1.1) den Fourier ısı iletim kanunu,

$$Q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

idi, bu bağıntının x 'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{dQ_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-kA \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

bulunur. Buradan da sıcaklık dağılımının diferansiyel denklemi,

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. İkinci mertebeden olan bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.4)$$

olur. C_1 ve C_2 integral sabitleri, sınır şartları yardımı ile bulunur.

Sınır şartlar,

$$x = x_1 \Rightarrow T = T_1$$

$$x = x_2 \Rightarrow T = T_2$$

dir. Bu sınır şartlara göre denk(2.4) den,

$$T_1 = C_1 x_1 + C_2$$

$$T_2 = C_1 x_2 + C_2$$

bulunur. Bu iki denklemden integral sabitleri;

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} = -\frac{\Delta T}{L} \quad ; \quad C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} x_1 = T_1 + \frac{\Delta T}{L} x_1$$

bulunur. Burada $\Delta T = T_1 - T_2$ ve $L = x_2 - x_1$ dir. C_1 ve C_2 sabitleri denklem (2.4) de yerlerine yazılırsa, düzlem duvar içindeki sıcaklık dağılımı için;

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (2.5)$$

bağıntısı, yada düzlem duvar T eksenine bitişik ($x_1=0$) ise,

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdan görüldüğü gibi, sıcaklık dağılımı doğrusaldır. Bu bağıntı yardımı ile duvar içindeki herhangi bir noktadaki sıcaklık bulunabilir.

Denk.(2.5) de elde edilen sıcaklık dağılımının x 'e göre türevi alınıp, Fourier ısı iletim kanununda yerine konulursa, düzlem duvarda iletimle geçen ısı miktarı için aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$Q_x = k A \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (2.6)$$

2.1.2 Isıl direnç tanımı

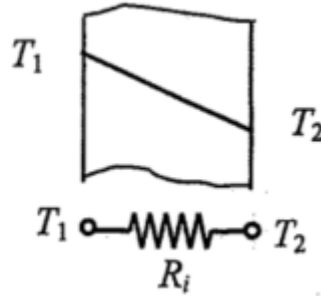
- Elektrik akımı ile ısı geçişi karşılaştırıldığında aralarında bir benzerlik olduğu görülür. Elektrik akımı, gerilim farkından, ısı geçişi ise sıcaklık farkından dolayı meydana gelmektedir. Ohm kanununa göre elektrik akımı,

$$I = \frac{\Delta V}{R_e}$$

dir. Fourier ısı iletim kanunu da Ohm kanununa benzer biçimde yazılırsa;

$$Q = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}} = \frac{\Delta T}{R_i}$$

$$Q = \frac{\Delta T}{R_i}$$



elde edilir. Burada benzeyen büyüklükler, ısı geçişi akım geçişine, sıcaklık farkı potansiyel farka ve ısıl direnç de elektrik direncine şeklindedir. O halde,

$$Q \rightarrow I \quad , \quad T \rightarrow V \quad , \quad R_i \rightarrow R_e$$

olur, burada R_i ,

$$R_i = \frac{L}{kA}$$

(2.11)

dir ve ısı iletim direnci adını alır. Birimi [K/W]; yada [h°C/Kcal] dir.

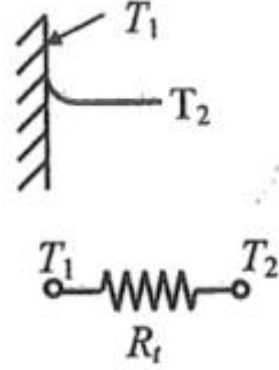
Duvar ile akışkan arasında taşınım ile geçen ısı miktarı da Ohm kanununa benzer biçimde yazılırsa,

$$Q = hA(T_1 - T_2) = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R_t}$$

$$Q = \frac{\Delta T}{R_t}$$

elde edilir. Burada R_t ,

$$R_t = \frac{1}{hA}$$



(2.12)

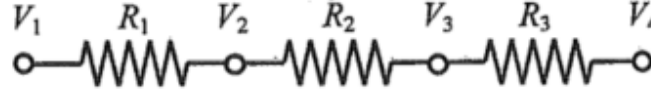
dir ve *ısı taşınım direnci* adını alır. Birimi [K/W]; yada [h°C/kcal] dir.

Elektriksel devreler için kısa hatırlatmalar:

Seri bağlama: Bu bağlama şeklinde dirençler şekilde gösterildiği gibi birbirlerine tek sıra şeklinde art arda bağlanırlar. Dolayısı ile her bir dirençten geçen akım birbirlerine eşittir.

Geçen akım;

$$i = \frac{V_1 - V_4}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{V_1 - V_4}{R_{top}}$$



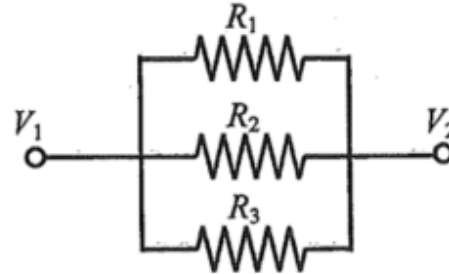
dır. Toplam direnç;

$$R_{top} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (2.13)$$

Paralel bağlama: Bu bağlama şeklinde dirençler birbirlerine paralel olacak şekilde bağlanırlar.

Geçen akım;

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} = \frac{\Delta V}{R_{top}}$$



dir. Burada toplam direnç aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır.

$$\frac{1}{R_{top}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (2.14)$$

Karışık bağlama: Bu bağlama şeklinde aynı devrede hem seri hem de paralel bağlama vardır. Aşağıda gösterilen bu devre seri bağlamaya indirgenerek çözülebilir.

Geçen akım;

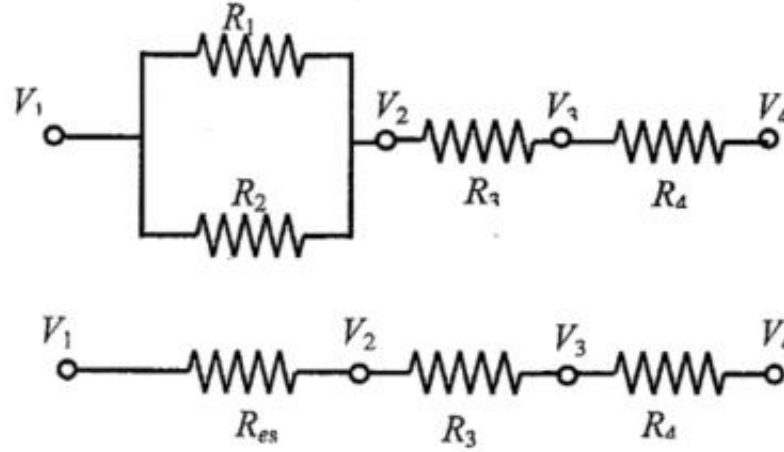
$$i = \frac{V_1 - V_4}{R_{eş} + R_3 + R_4} = \frac{\Delta V}{R_{top}}$$

dir. Burada eşdeğer direnç $R_{eş}$,

$$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.15)$$

bağıntısı ve toplam direnç;

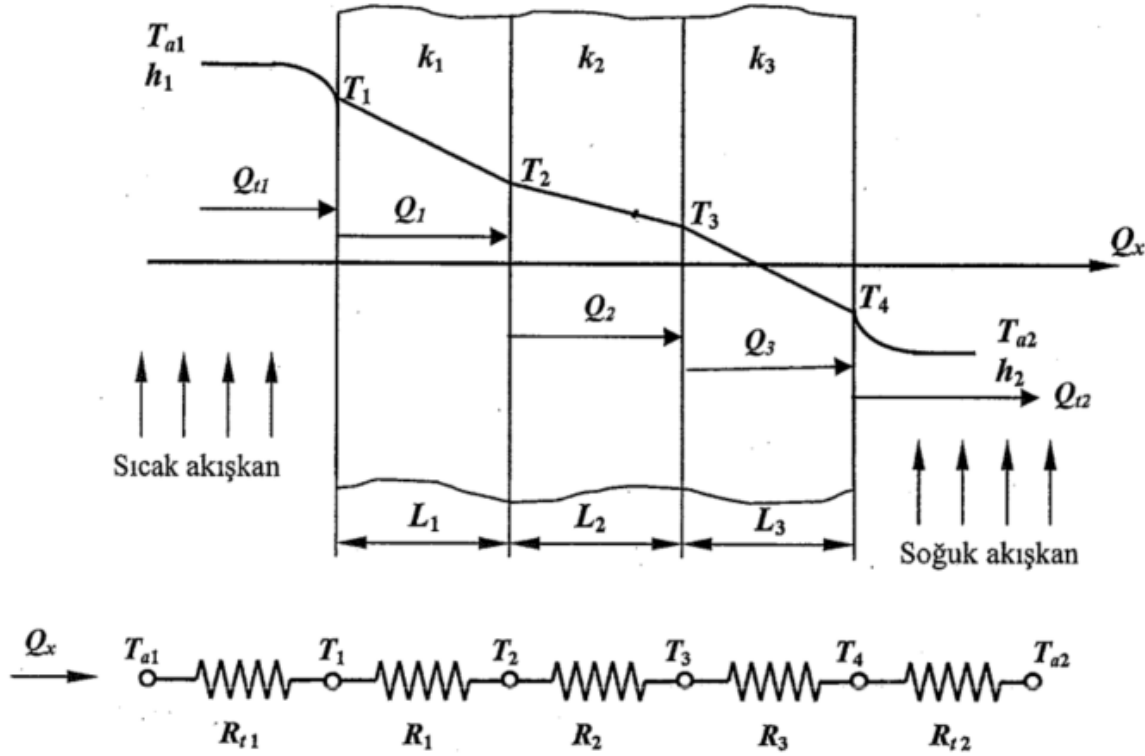
$$R_{top} = R_{eş} + R_3 + R_4 \quad (2.16)$$



bağıntısı ile hesaplanır. Isı geçişi problemlerinde de, ısıl dirençler elektrik devrelerindeki gibi hesaplanmaktadır.

2.2 BİRLEŞİK DÜZLEM DUVARLARDA ISI GEÇİŞİ

$$T_{a1} > T_{a2}$$



$$Q_{t1} = h_1 A (T_{a1} - T_1)$$

$$Q_1 = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2)$$

$$Q_2 = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3)$$

$$Q_3 = \frac{k_3 A}{L_3} (T_3 - T_4)$$

$$Q_{t2} = h_2 A (T_4 - T_{a2})$$

Yukarıdaki ısı geçişi ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{Q_{t1}}{h_1 A} = T_{a1} - T_1 \quad ; \quad \frac{Q_1 L_1}{k_1 A} = T_1 - T_2 \quad ; \quad \frac{Q_2 L_2}{k_2 A} = T_2 - T_3$$

$$\frac{Q_3 L_3}{k_3 A} = T_3 - T_4 \quad \frac{Q_{t2}}{h_2 A} = T_4 - T_{a2}$$

Yukarıdaki 5 denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{Q_{t1}}{h_1 A} + \frac{Q_1 L_1}{k_1 A} + \frac{Q_2 L_2}{k_2 A} + \frac{Q_3 L_3}{k_3 A} + \frac{Q_{t2}}{h_2 A} = T_{a1} - T_{a2} \quad (1)$$

termodinamiğin birinci kanununa göre her duvardan x yönünde geçen ısı miktarları birbirlerine eşit olacağından,

$$Q_{t1} = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_{t2} = Q_x$$

$$Q_x = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{L_3}{k_3 A} + \frac{1}{h_2 A}}$$

$$Q_x = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{\frac{1}{h_1 A} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i A} + \frac{1}{h_2 A}}$$

$$Q_x = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{R_{t1} + R_1 + R_2 + R_3 + R_{t2}} = \frac{\Delta T}{R_{top}}$$

$$R_{t1} = \frac{1}{h_1 A}, \quad R_1 = \frac{L_1}{k_1 A}, \quad R_2 = \frac{L_2}{k_2 A}, \quad R_3 = \frac{L_3}{k_3 A}, \quad R_{t2} = \frac{1}{h_2 A}$$

$$R_{top} = R_{t1} + R_1 + R_2 + R_3 + R_{t2}$$

$$Q_x = \frac{T_{a1} - T_2}{R_{t1} + R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_{a1} - T_3}{R_{t1} + R_1 + R_2} = \frac{T_1 - T_4}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_3 - T_{a2}}{R_3 + R_{t2}} = \dots$$

Toplam ısı geçiş katsayısı (U)

$$Q_x = U A \Delta T$$

$$Q_x = \frac{A(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_2}}$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_2}}$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_2} \quad R_T = \frac{1}{U A}$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_2}$$

$$Q_x = U A (T_{\infty,1} - T_{\infty,2})$$

ÖRNEK: Bir odanın penceresinin genişliği 1,5 m ve yüksekliği de 1,3 m olsun. Pencere önce tek camlı olup cam kalınlığı 3 mm ve camın ısı iletim katsayısı $k = 0,78 \text{ W/mK}$ dir. Oda sıcaklığı 22°C , dış hava sıcaklığı -7°C , iç taraftaki ısı taşınım katsayısı $8,3 \text{ W/m}^2\text{K}$ ve dış taraftaki ısı taşınım katsayısı $25 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'dir. Daha sonra pencere ölçüleri aynı kalmak koşuluyla ısı kaybım azaltmak için çift camlı pencere kullanılmıştır. Çift camlı pencerenin cam kalınlıkları da 3 mm olup iki cam arasında 9 mm kalınlığında hava tabakası ($k_{\text{hav}} = 0,026 \text{ W/mK}$) mevcuttur.

a) Tek camlı olması halinde pencereden olan ısı kaybım ve camın iç yüzey sıcaklığım bulunuz.

b) Çift camlı olması halinde pencereden olan ısı kaybını, camın iç yüzey sıcaklığım ve pencereden olan ısı kaybındaki azalma oranını bulunuz.

$$k_{\text{cam}} = 0.78 \text{ W/mK}$$

$$L_{\text{cam}} = 3 \text{ mm} = 0.003 \text{ m}$$

$$A = 1,5 \times 1,3 = 1,95 \text{ m}^2$$

$$T_{\text{iç}} = 22^\circ\text{C}$$

$$h_{\text{iç}} = 8,3 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$T_{\text{dış}} = -7^\circ\text{C}$$

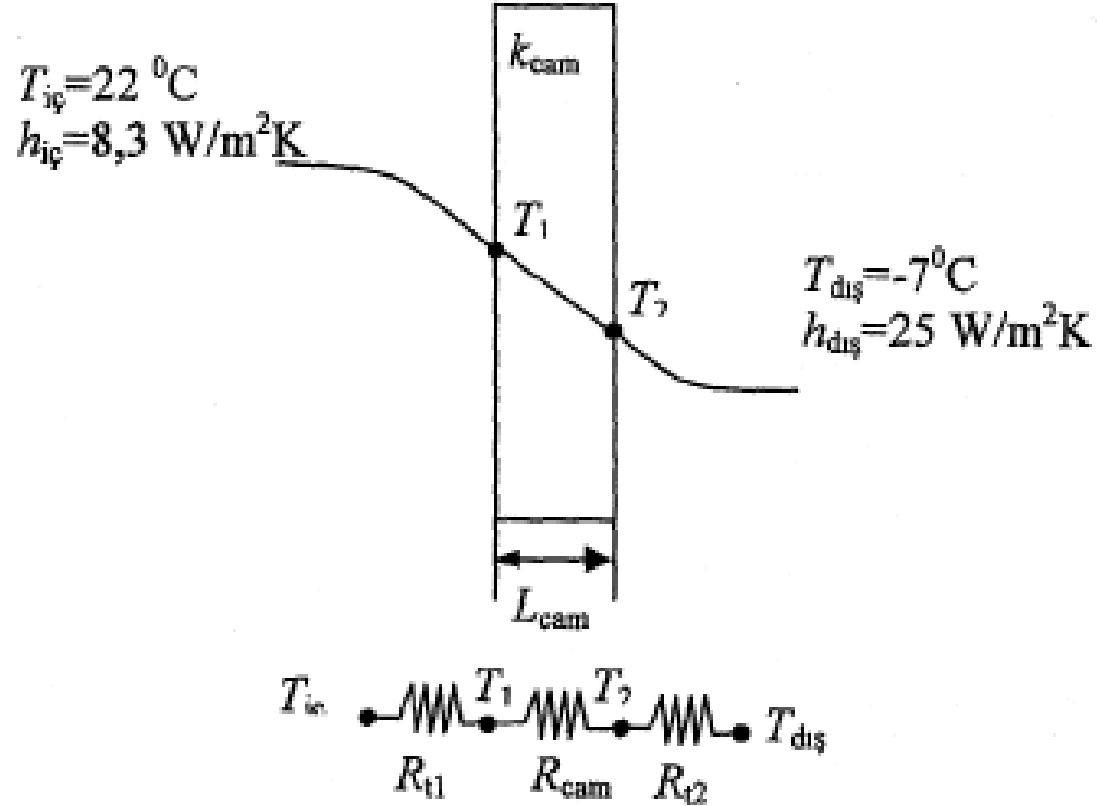
$$h_{\text{dış}} = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$k_{\text{hav}} = 0,026 \text{ W/mK}$$

Çözüm :

Kabuller

1. Isı geçişi bir boyutlu
2. Özellikler sabit
3. Devamlı rejim
4. Isı üretimi yok, ısınım ihmal



a) Tek camlı olması halinde ısı direnç yöntemine göre çözüm:

$$R_{t1} = \frac{1}{h_{iç} A} = \frac{1}{8,3 \times 1,95} = 0,0617 \text{ K/W}$$

$$R_{cam} = \frac{L_{cam}}{k_{cam} A} = \frac{0,003}{0,78 \times 1,95} = 0,0019 \text{ K/W}$$

$$R_{t2} = \frac{1}{h_{dış} A} = \frac{1}{25 \times 1,95} = 0,0205 \text{ K/W}$$

$$R_{top} = R_{t1} + R_{cam} + R_{t2} = 0,0617 + 0,0019 + 0,0205$$

$$R_{top} = 0,0841 \text{ K/W}$$

$$Q_{tek} = \frac{T_{iç} - T_{dış}}{R_{top}} = \frac{22 - (-7)}{0,0841}$$

$$Q_{tek} = 344,8 \text{ W}$$

Camın iç yüzey sıcaklığı;

$$Q_{tek} = \frac{T_{iç} - T_1}{R_{t1}}$$

$$T_1 = T_{iç} - Q_{tek} R_{t1} = 22 - 344,8 \times 0,0617$$

$$T_1 = 0,73^\circ C$$

Camın dış yüzey sıcaklığı:

$$Q_{tek} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cam}}$$

$$T_2 = T_1 - Q R_{cam} = 0,73 - 344,8 \times 0,0019$$

$$T_2 = 0,075^\circ C$$

Toplam ısı geçiş katsayısına göre çözüm:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{h_{iç}} + \frac{L_{cam}}{k_{cam}} + \frac{1}{h_{dış}} \rightarrow \frac{1}{K} = \frac{1}{8,3} + \frac{0,003}{0,78} + \frac{1}{25}$$

$$K = 6,08 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$Q_{tek} = KA(T_{iç} - T_{dış}) = 6,08 \times 1,95(22 - (-7)) = 343,8 \text{ W}$$

Camın iç yüzey sıcaklığı:

$$Q_{tek} = hA(T_{iç} - T_1)$$

$$343,8 = 8,3 \times 1,95(22 - T_1)$$

$$T_1 = 0,76^\circ C$$

b) Çift camlı olması halinde iki cam arasındaki hava tabakası ısı geçişine karşı bir direnç oluşturacaktır. Kalınlığı ince olan hava yada gaz tabakaları ısıyı taşımınla değil daha çok iletimle geçirirler. Hangi kalınlıktan sonra taşınımın başlayacağı doğal taşınım bölümünde verilmiştir.

$$L_1 = L_3 = 0,03\text{m}$$

$$L_2 = 9\text{mm} = 0,009\text{m}$$

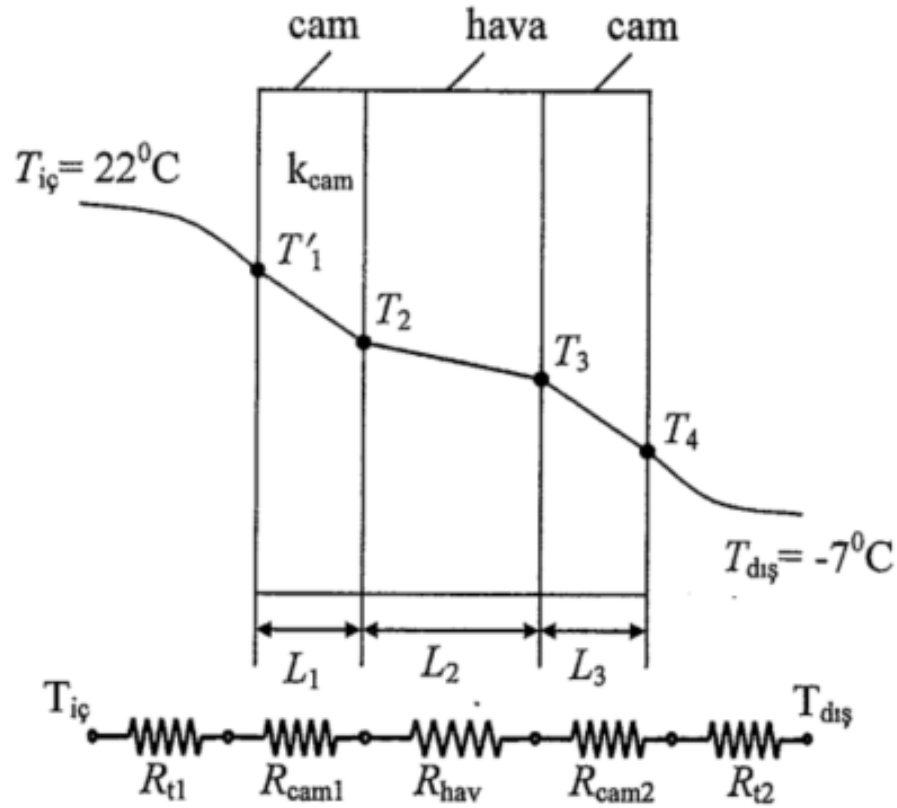
$$k_{\text{hav}} = 0,026\text{W} / \text{mK}$$

Çift cam olması halinde elektriksel benzeşim devresi şekildeki gibi olur. Bu durumda iki cam arasındaki hava tabakasının ısı direnci ve bir camın daha ısı direnci ilave gelmiştir. Buna göre;

$$R_{t1} = 0,0617\text{K} / \text{W}$$

$$R_{t2} = 0,0205\text{K} / \text{W}$$

$$R_{cam} = R_{cam1} = R_{cam2} = 0,0019 \text{ K/W}$$



Hava tabakasının ısı iletim irenci;

$$R_{hav} = \frac{L_2}{k_{hav} A} = \frac{0,009}{0,026.1,95} = 0,1775 \text{ K/W}$$

$$R_{top} = R_{t1} + R_{cam1} + R_{hav} + R_{cam2} + R_{t2}$$

$$R_{top} = 0,0617 + 0,0019 + 0,1775 + 0,0019 + 0,0205$$

$$R_{top} = 0,2635 \text{ K/W}$$

$$Q_{çift} = \frac{T_{i\phi} - T_{dış}}{R_{top}} = \frac{22 - (-7)}{0,2635}$$

$$Q_{çift} = 110,05 \text{ W}$$

Camın iç yüzey sıcaklığı:

$$Q_{çift} = h_{i\phi} A (T_{i\phi} - T'_1)$$

$$110,05 = 8,3 \times 1,95 (22 - T'_1)$$

$$T'_1 = 15,2 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{Isı kaybındaki azalma oranı} = \frac{Q_{tek} - Q_{çift}}{Q_{tek}} = \frac{344,8 - 110,05}{344,8} = 0,68 \rightarrow \%68$$

Örnek 2.2: Bir salonun dış duvar konstrüksiyonu aşağıda gösterildiği gibidir. Salonun iç ortam sıcaklığı 20°C , dış sıcaklık -6°C tir. İç yüzey ile iç ortam arasında ısı taşınım katsayısı $8 \text{ W/m}^2\text{K}$ ve dış yüzey ile dış ortam arasında ısı taşınım katsayısı $23 \text{ W/m}^2\text{K}$ dir. Buna göre:

- Duvarın toplam ısı geçiş katsayısını ve bu duvarın 25 m^2 lik yüzeyinden geçen ısı miktarını hesaplayınız.
- Duvardan geçen ısı miktarım %60 azaltmak için iç sıva ile tuğla arasına, ısı iletim katsayısı $0,04 \text{ W/mK}$ olan ısı yalıtım malzemesinden (polistiren köpük), hangi kalınlıkta yalıtım yapılmalıdır.
- Yalıtımlı halde iç ve dış duvarın yüzey sıcaklıklarını hesaplayınız.
- Yalıtım malzemesi üzerinde en yüksek sıcaklık nedir?

Verilenler:

$$k_1=0,87 \text{ W/mK}$$

$$k_2=0,52 \text{ W/mK}$$

$$k_3=0,87 \text{ W/mK}$$

$$k_y=0,04 \text{ W/mK}$$

$$L_1=3 \text{ cm}=0,03 \text{ m}$$

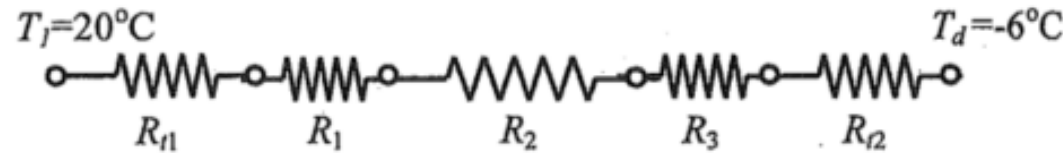
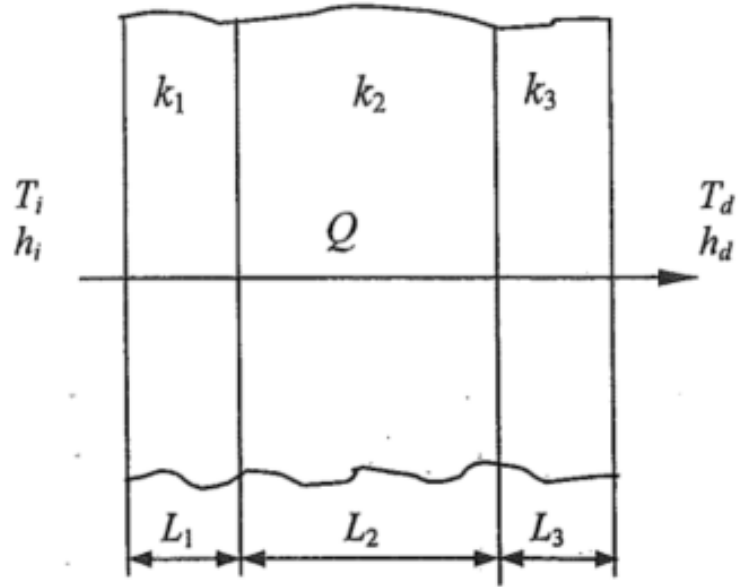
$$L_2=19\text{cm}=0,19 \text{ m}$$

$$L_3=4 \text{ cm}=0,04 \text{ m}$$

Çözüm :

Kabuller

- Isı geçişi bir boyutlu
- Özellikler sabit
- Devamlı rejim
- Isı üretimi yok



a) Yalıtımsız halde denk.(2.24)' de göre geçen ısı miktarı;

$$Q=K A (T_i-T_d)$$

dır. Burada toplam ısı geçiş katsayısı denk.(2.26)' dan,

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_d}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{8} + \frac{0,03}{0,87} + \frac{0,19}{0,52} + \frac{0,04}{0,87} + \frac{1}{23} = 0,6146$$

$$K = 1,627 \text{ W/m}^2\text{K}$$

dır. Geçen ısı miktarı,

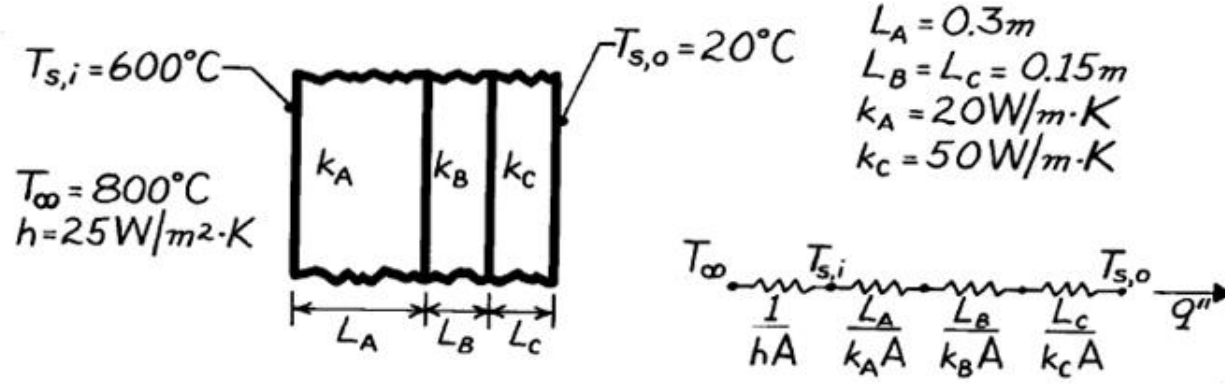
$$Q = 1,627 \times 25 [20 - (-6)]$$

$$Q = 1057,5 \text{ W}$$

bulunur.

Soru 1: Bir fırının duvarı üç katmandan oluşmaktadır. İç ve dış katmanların ısı iletim katsayıları, $k_A = 20 \text{ W/mK}$ ve $k_C = 50 \text{ W/mK}$, bilinmektedir. Üçüncü katman, B, diğer katmanlar arasında bulunmakta, kalınlığı bilinmekte ($L_B = 0,15 \text{ m}$), fakat ısı iletim katsayısı k_B bilinmemektedir. Sürekli rejimde, ölçümler dış yüzey sıcaklığını $T_{s,o} = 20^\circ\text{C}$, iç yüzey sıcaklığını $T_{s,i} = 600^\circ\text{C}$ ve fırındaki hava sıcaklığını $T_\infty = 800^\circ\text{C}$ olarak göstermektedir. İç taraftaki ısı taşınım katsayısı, $h = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$ olduğuna göre k_B değeri nedir?

Soru 1: Bir fırının duvarı üç katmandan oluşmaktadır. İç ve dış katmanların ısı iletim katsayıları, $k_A = 20 \text{ W/mK}$ ve $k_C = 50 \text{ W/mK}$, bilinmektedir. Üçüncü katman, B, diğer katmanlar arasında bulunmakta, kalınlığı bilinmemekte ($L_B = 0,15 \text{ m}$), fakat ısı iletim katsayısı k_B bilinmemektedir. Sürekli rejimde, ölçümler dış yüzey sıcaklığını $T_{s,o} = 20^\circ\text{C}$, iç yüzey sıcaklığını $T_{s,i} = 600^\circ\text{C}$ ve fırındaki hava sıcaklığını $T_\infty = 800^\circ\text{C}$ olarak göstermektedir. İç taraftaki ısı taşınım katsayısı, $h = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$ olduğuna göre k_B değeri nedir?



ASSUMPTIONS: (1) Steady-state conditions, (2) One-dimensional conduction, (3) Constant properties, (4) Negligible contact resistance, (5) Negligible radiation effects.

ANALYSIS: Referring to the thermal circuit, the heat flux may be expressed as

$$q'' = \frac{T_{s,i} - T_{s,o}}{\frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C}} = \frac{(600 - 20)^\circ\text{C}}{\frac{0.3 \text{ m}}{20 \text{ W/m}\cdot\text{K}} + \frac{0.15 \text{ m}}{k_B} + \frac{0.15 \text{ m}}{50 \text{ W/m}\cdot\text{K}}}$$

$$q'' = \frac{580}{0.018 + 0.15/k_B} \text{ W/m}^2.$$

The heat flux may be obtained from

$$q'' = h(T_\infty - T_{s,i}) = 25 \text{ W/m}^2\cdot\text{K} (800 - 600)^\circ\text{C}$$

$$q'' = 5000 \text{ W/m}^2.$$

Substituting for the heat flux from Eq. (2) into Eq. (1), find

$$\frac{0.15}{k_B} = \frac{580}{q''} - 0.018 = \frac{580}{5000} - 0.018 = 0.098$$

$$k_B = 1.53 \text{ W/m}\cdot\text{K}.$$

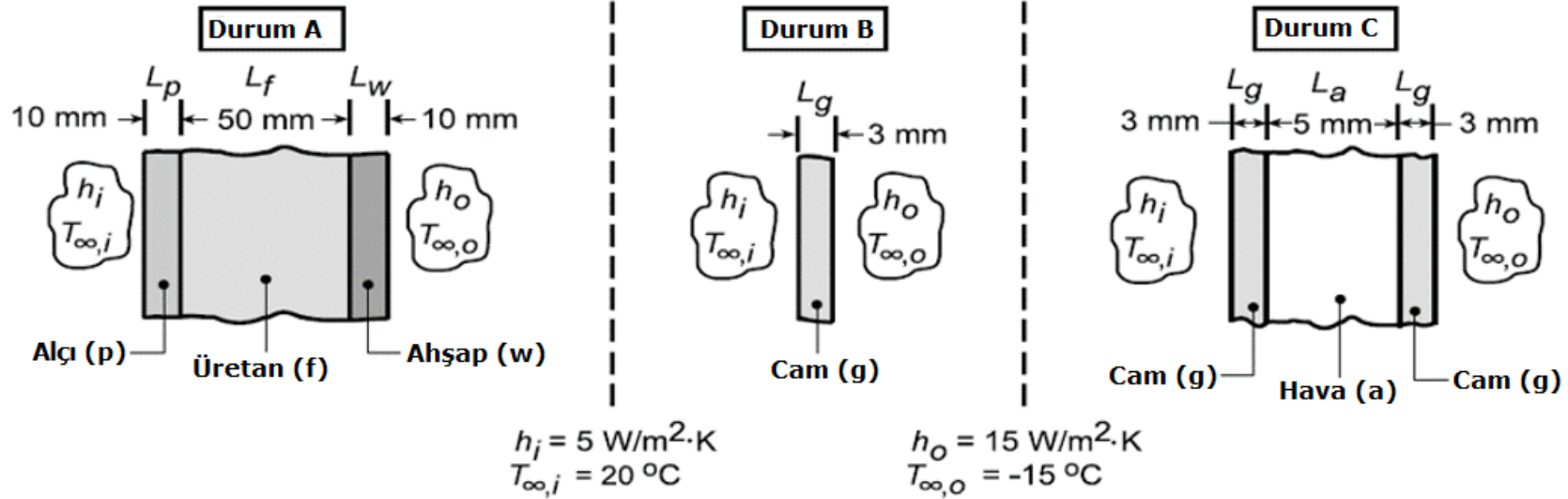
Soru: Bir binanın dış duvarları, 10 mm kalınlığında alçı pano, 50 mm kalınlığında ürethan köpük ve 10 mm kalınlığında yumuşak ahşaptan yapılmıştır. Tipik bir kış gününde dış taraf ve iç taraf hava sıcaklıkları -15°C ve 20°C , dış ve iç ısı taşınım katsayıları $15 \text{ W/m}^2\text{K}$ ve $5 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'dir.

a) Duvarın birim yüzey alanı için ısıtma yükü nedir?

b) Karma duvar, 3 mm kalınlığındaki bir cam pencere ile değiştirilirse ısıtma yükü ne olur?

c) Karma duvar, 5 mm kalınlığında durgun hava ile ayrılan iki tane 3 mm kalınlığındaki camdan oluşan çift camlı bir pencere ile yer değiştirilirse ısıtma yükü ne olur?

Alçı sıva $k_p=0,17 \text{ W/mK}$, ürethan köpük $k_f=0,026 \text{ W/mK}$, ahşap $k_w=0,12 \text{ W/mK}$, cam $k_g=1,4 \text{ W/mK}$ ve hava $k_a=0,0263 \text{ W/mK}$, $A=1\text{m}^2$



ANALYSIS: (a) The heat loss may be obtained by dividing the overall temperature difference by the total thermal resistance. For the composite wall of unit surface area, $A = 1 \text{ m}^2$,

$$q = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{\left[(1/h_i) + (L_p/k_p) + (L_f/k_f) + (L_w/k_w) + (1/h_o) \right] / A}$$

$$q = \frac{20^\circ \text{C} - (-15^\circ \text{C})}{\left[(0.2 + 0.059 + 1.92 + 0.083 + 0.067) \text{m}^2 \cdot \text{K/W} \right] / 1 \text{m}^2}$$

$$q = \frac{35^\circ \text{C}}{2.33 \text{ K/W}} = 15.0 \text{ W}$$

<

(b) For the single pane of glass,

$$q = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{\left[(1/h_i) + (L_g/k_g) + (1/h_o) \right] / A}$$

$$q = \frac{35^\circ \text{C}}{\left[(0.2 + 0.002 + 0.067) \text{m}^2 \cdot \text{K/W} \right] / 1 \text{m}^2} = \frac{35^\circ \text{C}}{0.269 \text{ K/W}} = 130.3 \text{ W}$$

<

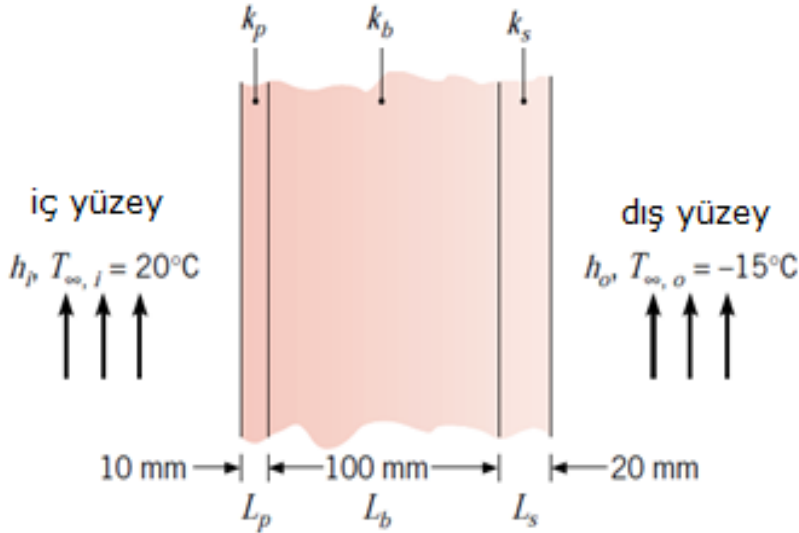
(c) For the double pane window,

$$q = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{\left[(1/h_i) + 2(L_g/k_g) + (L_a/k_a) + (1/h_o) \right] / A}$$

$$q = \frac{35^\circ \text{C}}{\left[(0.2 + 0.004 + 0.190 + 0.067) \text{m}^2 \cdot \text{K/W} \right] / 1 \text{m}^2} = \frac{35^\circ \text{C}}{0.461 \text{ K/W}} = 75.9 \text{ W}$$

Soru 2: Bir evin şekilde gösterildiği gibi ahşap, cam yünü yalıtım ve alçı panodan oluşan bir karma duvarı vardır. Soğuk bir kış gününde ısı taşınım katsayıları $h_o = 60 \text{ W/m}^2\text{K}$ ve $h_i = 30 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'dir. Toplam duvar yüzey alanı 350 m^2 'dir. Malzemelere ait ısı iletim katsayıları alçı $k_p=0,17 \text{ W/mK}$, cam yünü $k_b=0,038 \text{ W/mK}$ ve ahşap $k_s=0,12 \text{ W/mK}$ olduğuna göre;

- Verilen koşullarda duvarın ısı direncini veren bir bağıntı yazın.
- Duvardaki toplam ısı kaybını hesaplayın.
- Rüzgarla birlikte ısı taşınım katsayısı, $h_o=300 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'ye yükselirse ısı kaybındaki artışı yüzde olarak bulun.
- Duvardaki ısı geçişini en fazla etkileyen ısı direnç hangisidir?



ANALYSIS: (a) The expression for the total thermal resistance of the house wall follows from Eq. 3.18.

$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{h_i A} + \frac{L_p}{k_p A} + \frac{L_b}{k_b A} + \frac{L_s}{k_s A} + \frac{1}{h_o A}.$$

(b) The total heat loss through the house wall is

$$q = \Delta T / R_{\text{tot}} = (T_i - T_o) / R_{\text{tot}}.$$

Substituting numerical values, find

$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 350 \text{ m}^2} + \frac{0.01 \text{ m}}{0.17 \text{ W/m} \cdot \text{K} \times 350 \text{ m}^2} + \frac{0.10 \text{ m}}{0.038 \text{ W/m} \cdot \text{K} \times 350 \text{ m}^2} + \frac{0.02 \text{ m}}{0.12 \text{ W/m} \cdot \text{K} \times 350 \text{ m}^2} + \frac{1}{60 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 350 \text{ m}^2}$$

$$R_{\text{tot}} = [9.52 + 16.8 + 752 + 47.6 + 4.76] \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/W} = 831 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/W}$$

The heat loss is then,

$$q = [20 - (-15)]^\circ\text{C} / 831 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/W} = 4.21 \text{ kW}.$$

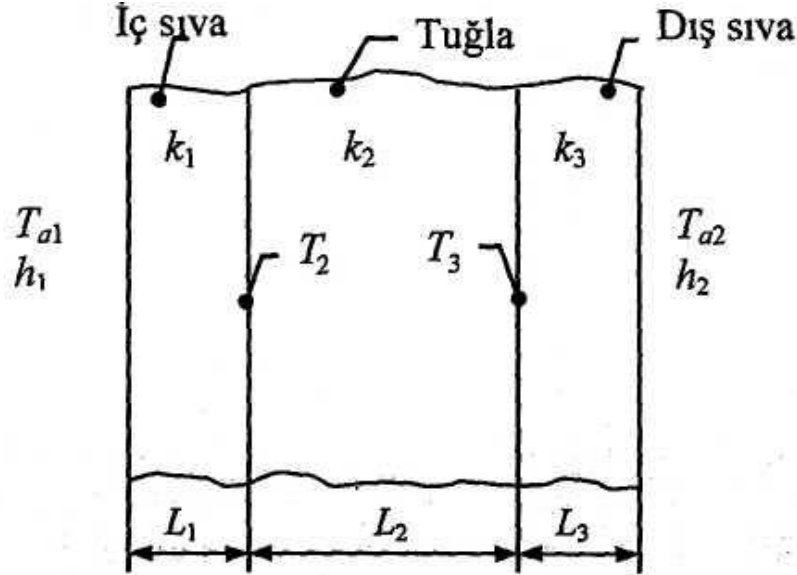
(c) If h_o changes from 60 to 300 $\text{W/m}^2\cdot\text{K}$, $R_o = 1/h_o A$ changes from $4.76 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/W}$ to $0.95 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/W}$. This reduces R_{tot} to $826 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/W}$, which is a 0.5% decrease and hence a 0.5% increase in q .

(d) From the expression for R_{tot} in part (b), note that the insulation resistance, $L_b/k_b A$, is $752/830 \approx 90\%$ of the total resistance. Hence, this material layer controls the resistance of the wall. From part (c) note that a 5-fold decrease in the outer convection resistance due to an increase in the wind velocity has a negligible effect on the heat loss.

Soru: Duvarının kesiti şekilde gösterildiği gibi olan bir odanın iç sıcaklığı 20°C , dış sıcaklık -10°C , duvarın iç ve dış yüzeylerindeki ısı taşınım katsayıları da sırasıyla 8 ve $23 \text{ W/m}^2\text{K}$ dir. Gerekli kabulleri yaparak;

- a) Duvarın toplam ısı geçiş katsayısını ve duvar boyutları $3,5\text{m} \times 4,5\text{m}$ olduğuna göre duvardan geçen ısı miktarını hesaplayınız.
- b) T_2 ve T_3 sıcaklıklarını hesaplayınız.
- c) Duvardan geçen ısıнын %30 azalması için iç sıva ile tuğla arasına ısı iletim katsayısı $0,045 \text{ tW/mK}$ olan yalıtkan malzemesinden, hangi kalınlıkta yalıtım yapılmalıdır.
- d) Yalıtımlı halde duvarın iç ve dış yüzey sıcaklıklarını hesaplayınız.

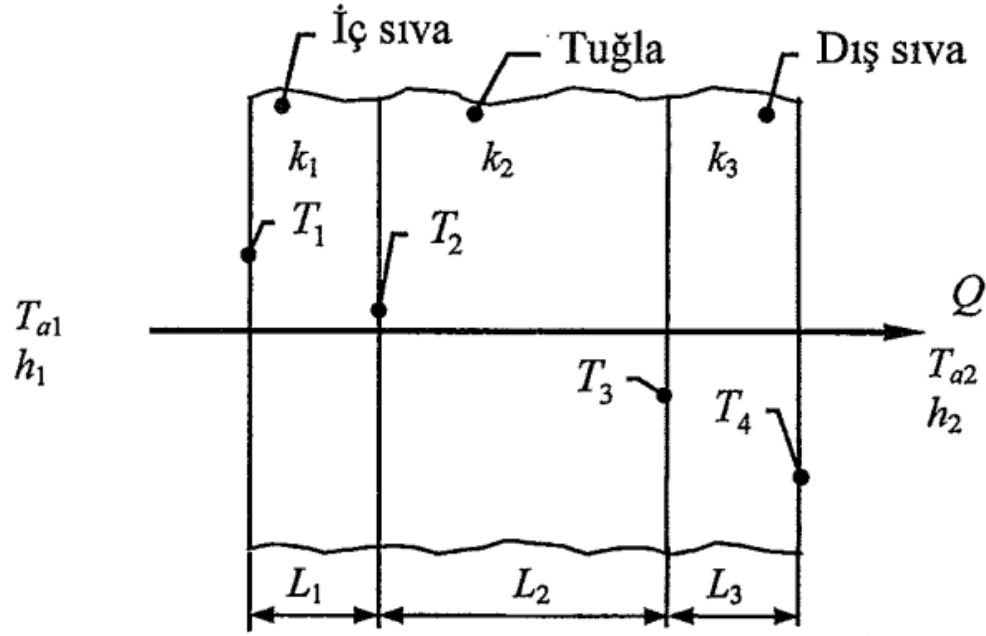
$$\begin{aligned}k_1 &= 0,95 \text{ W/mK} \\k_2 &= 0,70 \text{ W/mK} \\k_3 &= 1,10 \text{ W/mK} \\h_1 &= 8 \text{ W/m}^2\text{K} \\h_2 &= 23 \text{ W/m}^2\text{K} \\T_{a1} &= 20^{\circ}\text{C} \\T_{a2} &= -10^{\circ}\text{C} \\L_1 &= 3 \text{ cm} \\L_2 &= 20 \text{ cm} \\L_3 &= 4 \text{ cm}\end{aligned}$$



Kabuller:

1. Devamlı rejim,
2. Bir boyutlu ısı iletimi,
3. Özellikler sabit,
4. Isı üretimi yok.

a) Toplam ısı geçiş katsayısı K (U)



b) Isıl dirençler seri bağlı olduğundan, her bir dirençten geçen ısılar yada ısı akıları birbirlerine eēit olacağından;

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{h_1} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{8} + \frac{0,03}{0,95} + \frac{0,20}{0,70} + \frac{0,04}{1,10} + \frac{1}{23} = 0,522$$

$$K = 1,91 \text{ W/m}^2\text{K}$$

olur. Duvardan geen ısı miktarı;

$$Q = KA(T_{a1} - T_{a2}) = 1,91 \times 3,5 \times 4,5 \{20 - (-10)\}$$

$$Q = 902,47 \text{ W}$$

T_2 sıcaklığı:

$$q = \frac{T_{a1} - T_2}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_1}{k_1}}$$

$$\frac{902,47}{3,5 \times 4,5} = \frac{20 - T_2}{\frac{1}{8} + \frac{0,03}{0,95}}$$

$$T_2 = 11,08^\circ\text{C}$$

T_3 sıcaklığı:

$$q = \frac{T_3 - T_{a2}}{\frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_2}}$$

$$\frac{902,47}{3 \times 4,5} = \frac{T_3 - (-10)}{\frac{0,04}{1,10} + \frac{1}{23}}$$

$$T_3 = -4,5^\circ\text{C}$$

c) Isı kaybının %30 azalması halinde geçen ısı miktarı,

$$Q' = K'A(T_{a1} - T_{a2})$$

$$Q' = Q - 0,30 \times Q = 0,70 \times Q$$

$$Q' = 0,70 \times 902,47$$

$$Q' = 631,73 \text{ W}$$

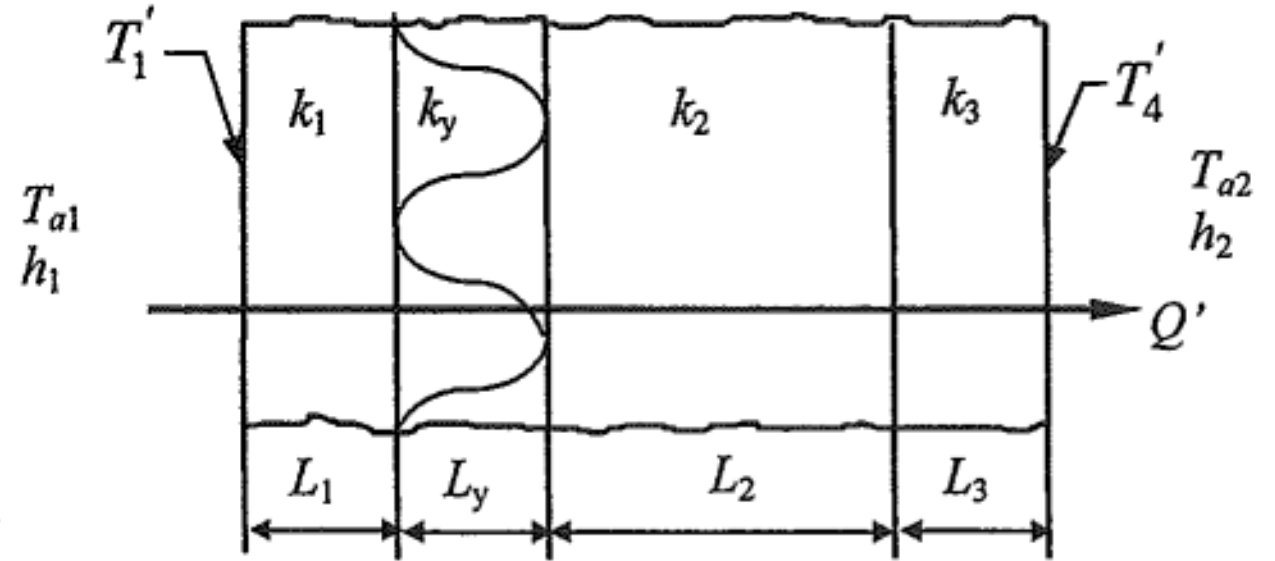
dır. Yalıtımlı halde K' ,

$$631,73 = K' \times 3,5 \times 4,5 [20 - (-10)]$$

$$K' = 1,336 \text{ W/m}^2\text{K}$$

olur. Diğer taraftan yalıtımlı haldeki K' , yukarıdaki seri bağlı ısı dirençlerine göre,

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{h_1} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_y}{k_y} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_2}$$



dır. Değerler yerlerine yazılırsa, yalıtım kalınlığı,

$$\frac{1}{1,336} = \frac{1}{8} + \frac{0,03}{0,95} + \frac{L_y}{0,045} + \frac{0,20}{0,70} + \frac{0,04}{1,10} + \frac{1}{23}$$

$$L_y = 0,0101 \text{ m}$$

d) Yapılan kabullere göre her bir duvardan geçen ısılar birbirine eşit olacağından, yalıtımlı halde duvarın iç (T_1') ve dış (T_4') yüzey sıcaklıkları,

$$Q' = h_1 A (T_{a1} - T_1')$$

$$631,73 = 8 \times 3,5 \times 4,5 (20 - T_1')$$

$$T_1' = 14,98^\circ\text{C} \text{ ve,}$$

$$Q' = h_2 A (T_4' - T_2)$$

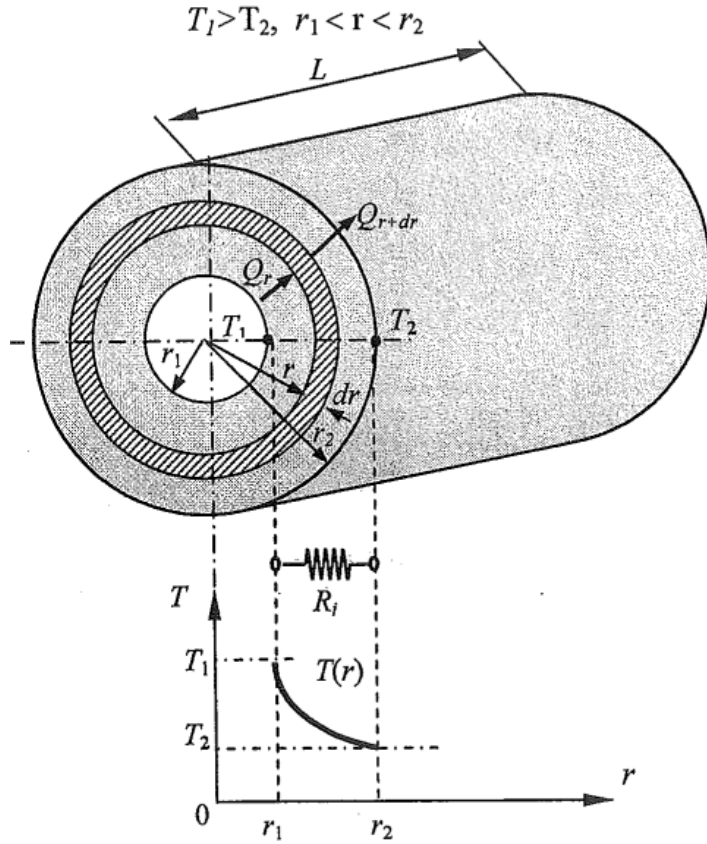
$$671,73 = 23 \times 3,5 \times 4,5 (T_4' - (-10))$$

$$T_4' = -8,25^\circ\text{C}$$

olarak bulunur.

SİLİNDİRİK YÜZEYLERDE ISI İLETİMİ

SİLİNDİRİK YÜZEYLERDE ISI İLETİMİ



$$Q_r - Q_{r+dr} = 0$$

biçiminde yazılabilir. ve

$$Q_{r+dr} = Q_r + \frac{dQ_r}{dr}(dr)$$

dir. Bu iki denklemden,

$$Q_r - Q_r + \frac{dQ_r}{dr}(dr) = 0$$

$$(dr) \neq 0 \text{ olduğundan } \frac{dQ_r}{dr} = 0$$

olur. Silindirik yüzeylerde **Fourier** ısı iletim kanunu,

$$Q_r = -k A \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr} \left(-k A \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Kabuller:

1. Isı iletimi radyal yönde
2. Özellikler sabit
3. Isı üretimi yok
4. Devamlı hal

Burada A silindirin yanal yüzey alanı olup $A=2\pi rL$ dir, r değişken, diğerleri sabit olduğundan denklemde yerine konulursa, silindir içindeki sıcaklık dağılımı için;

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

biçiminde diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

olur. Sınır şartlar;

$$r = r_1 \Rightarrow T = T_1$$

$$r = r_2 \Rightarrow T = T_2$$

dır. Bu sınır şartlarından,

$$T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2$$

$$T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2$$

denklemleri ve buradan da integral sabitleri,

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad C_2 = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r_1$$

$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right)$$

$$Q_r = -k A \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r}$$

bulunur ve $A = 2\pi r L$ değeri de yerine konulursa, silindirik yüzeydeki ısı geçişi,

$$Q_r = \frac{2\pi L (T_1 - T_2)}{\frac{1}{k} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$Q_r = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi L k} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\Delta T}{R_i}$$

$$R_i = \frac{1}{2\pi L k} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{K/W})$$

$$\Delta T = R_i Q_r$$

2.4 BİRLEŞİK SİLİNDİRİR YÜZEYLERDE ISI GEÇİŞİ

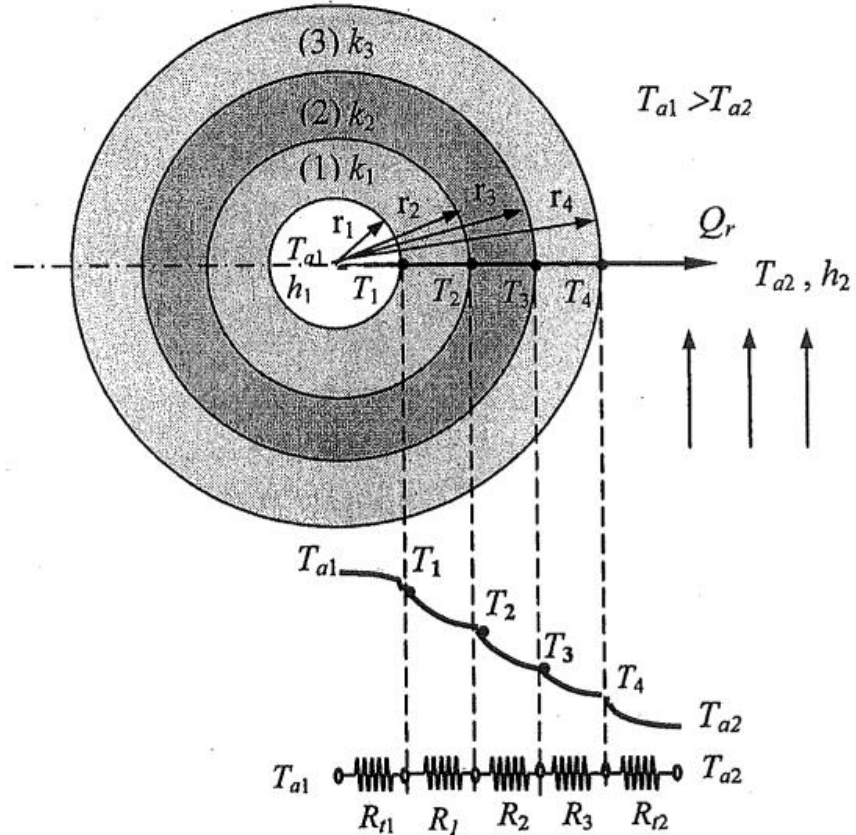
Merkezleri aynı iç içe borular yada ısı kaybına karşı yalıtılmış silindirik tabakalar birleşik silindirik yüzeyleri oluştururlar.

Şekilde gösterilen merkezleri aynı üç farklı malzemeden meydana gelmiş silindirik duvarların, iç kısmında T_{a1} sıcaklığında bir akışkan ve dış kısmında da T_{a2} sıcaklığında diğer bir akışkan bulunsun. Burada, $T_{a1} > T_{a2}$, L silindirik parçaların boyu, r_1 , r_2 ve r_3 sırasıyla yan çapları, k_1 , k_2 ve k_3 ısı iletim katsayıları, h_1 ve h_2 sırasıyla iç ve dış yüzeydeki ısı taşınım katsayılarıdır.

Birleşik silindirik yüzeylerdeki ısı geçişi için, devamlı rejimde, bir boyutlu (radyal yönde), içerisinde ısı üretimi yok ve termofiziksel özelliklerin sabit olması halinde aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

Kabuller:

1. Isı iletimi radyal yönde
2. Özellikler sabit
3. Isı üretimi yok
4. Devamlı hal



$$Q_{r1} = h_1 A_1 (T_{a1} - T_1) = h_1 2\pi r_1 L (T_{a1} - T_1)$$

$$Q_1 = \frac{2\pi L k_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$$

$$Q_2 = \frac{2\pi L k_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}} (T_2 - T_3)$$

$$Q_3 = \frac{2\pi L k_3}{\ln \frac{r_4}{r_3}} (T_3 - T_4)$$

$$Q_{r2} = h_2 A_2 (T_4 - T_{a2}) = h_2 2\pi r_4 L (T_4 - T_{a2})$$

Yapılan kabullere göre (devamlı rejimde ve ısı üretimi olmadığından) enerji dengesinden yukarıda açıklanan ısı geçişleri birbirlerine eşit olur.

$$Q_{t1} = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_{t2} = Q_r \quad (6)$$

$$Q_r = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_2}}$$

$$Q_r = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{R_{t1} + R_1 + R_2 + R_3 + R_{t2}} = \frac{\Delta T}{R_{top}}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada ısı dirençler;

$$R_{t1} = \frac{1}{2\pi r_1 L h_1}$$

$$R_{t2} = \frac{1}{2\pi r_4 L h_2}$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi L k_1} \ln \frac{r_2}{r_1} ;$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi L k_2} \ln \frac{r_3}{r_2} ;$$

$$R_3 = \frac{1}{2\pi L k_3} \ln \frac{r_4}{r_3}$$

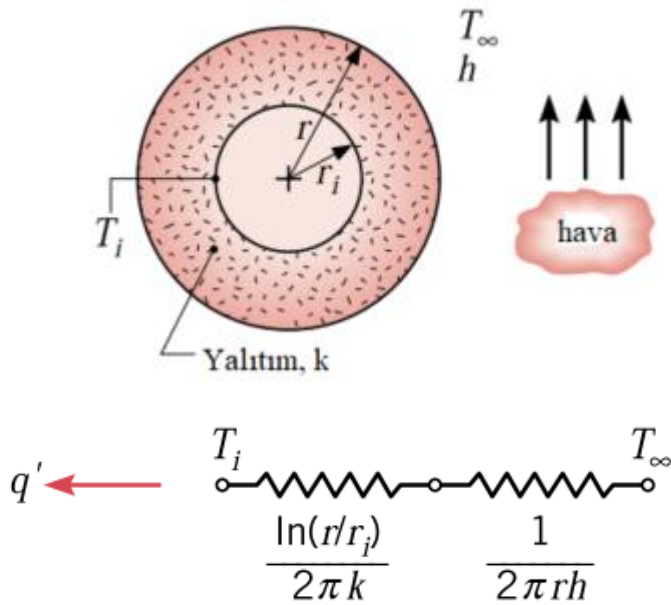
$$Q_r = \frac{T_{a1} - T_1}{R_{t1}} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_2 - T_4}{R_2 + R_3} = \frac{T_{a1} - T_2}{R_{t1} + R_1} = \frac{T_{a1} - T_3}{R_{t1} + R_1 + R_2} = \frac{T_4 - T_{a2}}{R_{t2}} = \dots$$

$$Q_r = \frac{2\pi L (T_{a1} - T_{a2})}{\frac{1}{r_1 h_1} + \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{k_3} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{r_4 h_2}}$$

$$Q = K A \Delta T$$

$$K_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_3} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4 h_2}}$$

Kritik yalıtım yarıçapı



$$R'_{\text{tot}} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi r h}$$

$$q' = \frac{T_\infty - T_i}{R'_{\text{tot}}}$$

$$\frac{dR'_{\text{tot}}}{dr} = 0$$

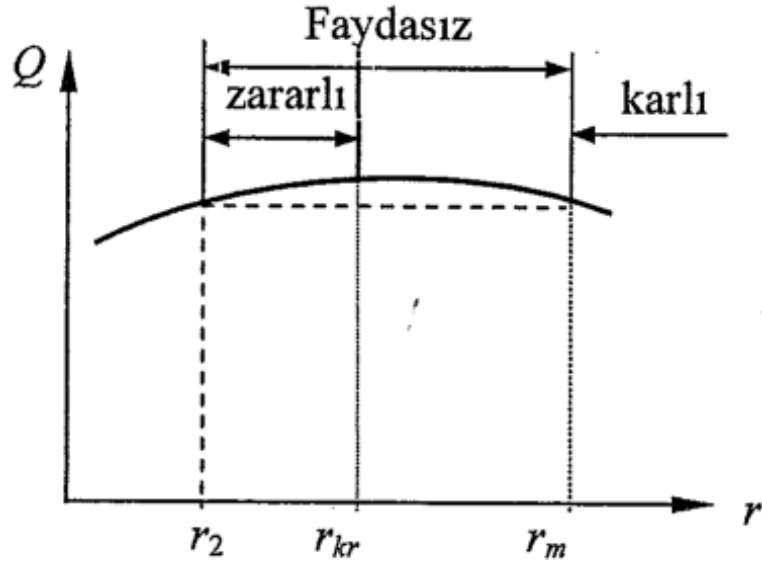
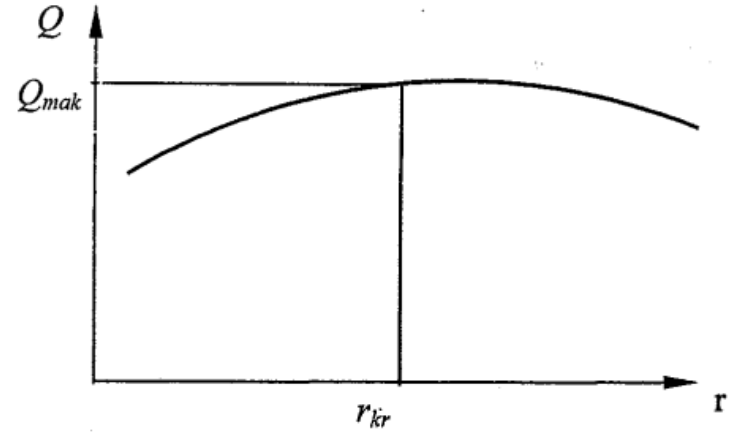
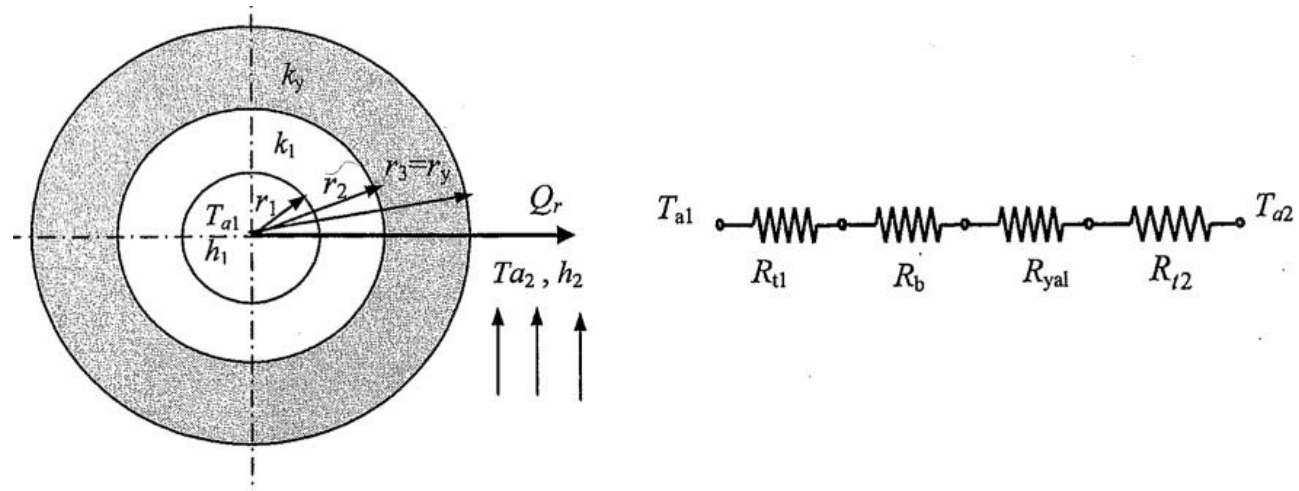
$$\frac{1}{2\pi k r} - \frac{1}{2\pi r^2 h} = 0$$

$$r = \frac{k}{h}$$

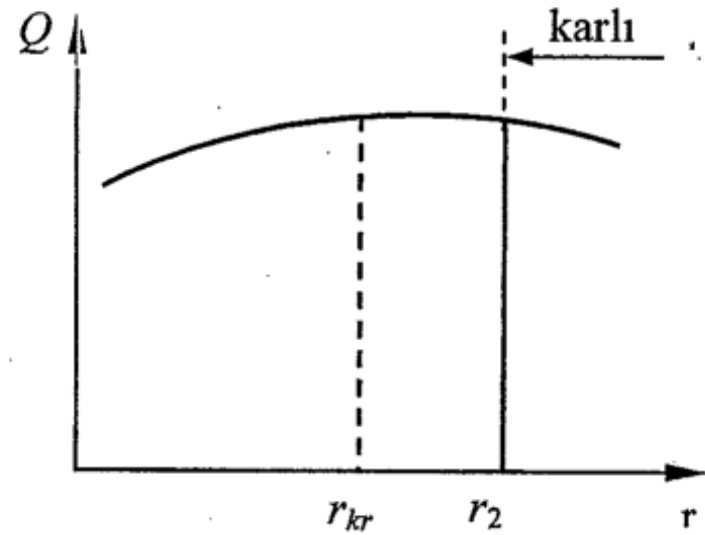
$$\frac{d^2 R'_{\text{tot}}}{dr^2} = -\frac{1}{2\pi k r^2} + \frac{1}{\pi r^3 h}$$

$$\frac{d^2 R'_{\text{tot}}}{dr^2} = \frac{1}{\pi (k/h)^2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2\pi k^3/h^2} > 0$$

$$r_{\text{cr}} \equiv \frac{k}{h}$$



(a) $r_2 < r_{kr}$ olması hali



(b) $r_2 > r_{kr}$ olması hali

Soru: 3 mm çapında ve 10 m uzunluğundaki bir elektrik teli ısı iletim katsayısı 0,17 W/mK olan 2 mm kalınlığında plastik malzeme ile kaplanmıştır. Tel ile plastik malzemenin ara yüzey sıcaklığı 55 °C ve ortam sıcaklığı 32 °C'dır. Plastik malzeme ile ortam arasındaki ısı taşınım katsayısı 20 W/m²K olduğuna göre ısı geçişini hesaplayınız ve plastik malzemenin ısı geçişini artırıp artırmadığımı araştırınız ve sonucu irdeleyiniz?

Çözüm:

$$r_{\text{tel}} = 1,5 \text{ mm} = 0,0015 \text{ m}$$

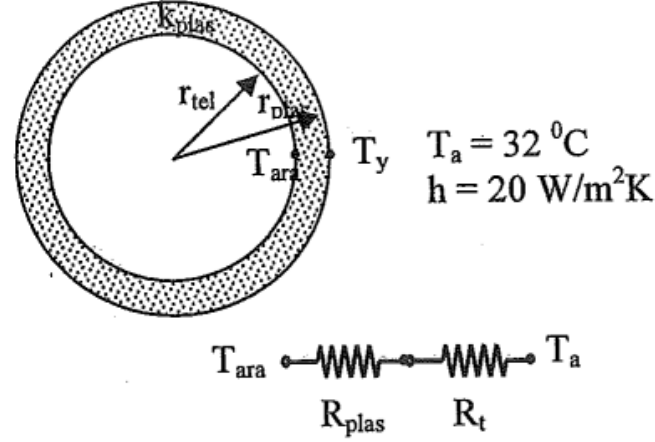
$$L = 10 \text{ m}$$

$$t = 2 \text{ mm}$$

$$r_{\text{plas}} = r_{\text{tel}} + t = 1,5 + 2 = 3,5 \text{ mm}$$

$$k_{\text{plas}} = 0,17 \text{ W/mK}$$

$$Q = ?$$



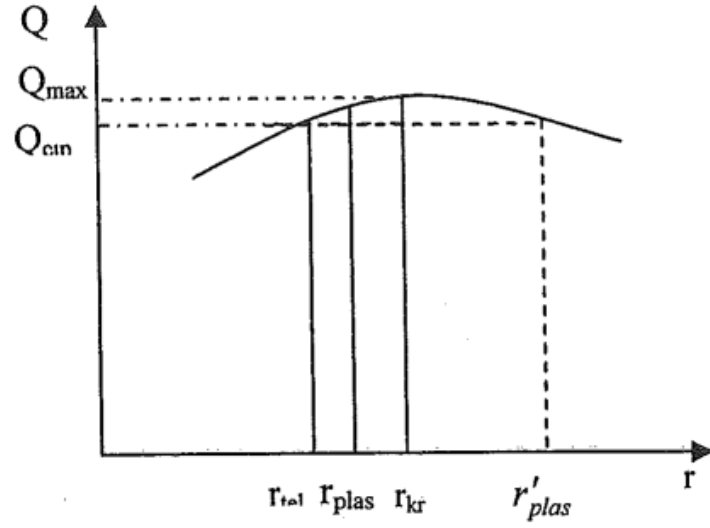
Geçen ısı miktarı;

$$R_{\text{plas}} = \frac{1}{2\pi L k_{\text{plas}}} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi \times 10 \times 0,17} \ln \frac{3,5}{1,5} = 0,07936 \text{ K/W}$$

$$Q = \frac{T_{\text{ara}} - T_a}{R_{\text{top}}} = \frac{55 - 32}{0,3068} = 75 \text{ W}$$

$$R_t = \frac{1}{2\pi L r_2 h} = \frac{1}{2\pi \times 10 \times 3,5 \times 10^{-3} \times 20} = 0,2275 \text{ K/W}$$

$$R_{\text{top}} = R_{\text{plas}} + R_t = 0,07936 + 0,2275 = 0,3068 \text{ K/W}$$



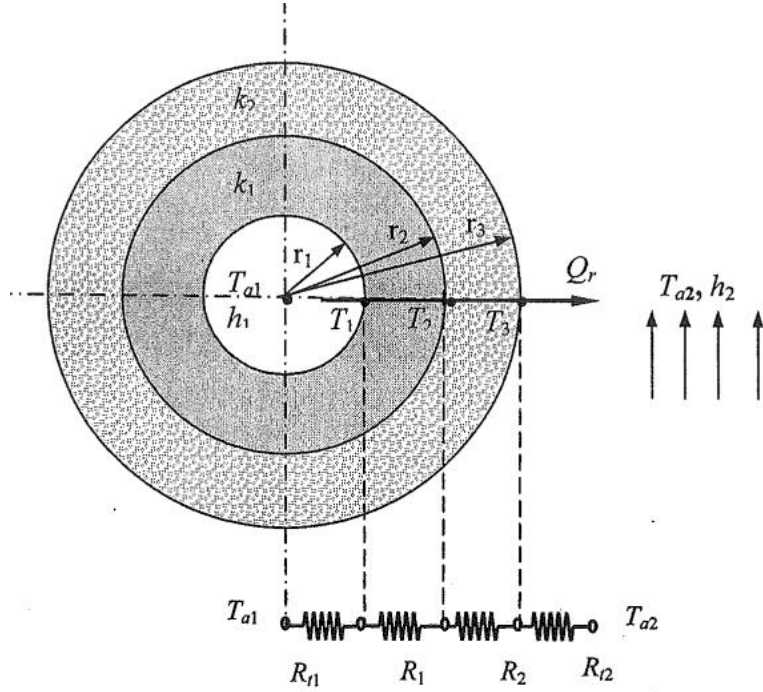
$$r_{kr} = \frac{k_{plas}}{h} = \frac{0,17}{20} = 0,0085 \text{ m}$$

$$r_{kr} = \mathbf{0,0085 \text{ m}}$$

$r_{tel} = 0,0015 \text{ m}$ ve $r_{plas} = 0,0035 \text{ m}$ olduğundan;

$$r_{tel} < r_{plas} < r_{kr}$$

BİRLEŞİK KÜRESEL YÜZEYLERDE ISI GEÇİŞİ



$$Q_{f1} = h_1 A_1 (T_{a1} - T_1) = h_1 4\pi r_1^2 (T_{a1} - T_1)$$

(1) İçteki kürenin iç yüzeyi ile iç akışkan arasında taşınım ile ısı geçişi

$$Q_1 = 4\pi k_1 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (T_1 - T_2)$$

(2) Birinci kürede ısı iletimi

$$Q_2 = 4\pi k_2 \frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2} (T_2 - T_3)$$

(3) İkinci kürede ısı iletimi

$$Q_{f2} = h_2 4\pi r_3^2 (T_{31} - T_{a2})$$

(4) Dıştaki kürenin dış yüzeyi ile dış akışkan arasında ısı taşınımı

$$Q_{f1} = Q_1 = Q_2 = Q_{f2} = Q_r$$

(5) Enerji dengesi

Yukarıdaki beş denklemden, birleşik küresel yüzeylerdeki ısı geçişi için,

$$Q_r = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{\frac{1}{4\pi r_1^2 h_1} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k_1} + \frac{r_3 - r_2}{4\pi r_2 r_3 k_2} + \frac{1}{4\pi r_3^2 h_2}}$$

$$Q_r = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{R_{f1} + R_1 + R_2 + R_{f2}}$$

$$R_{f1} = \frac{1}{4\pi r_1^2 h_1}$$

$$R_1 = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k_1}$$

$$R_{f2} = \frac{1}{4\pi r_3^2 h_2}$$

$$R_2 = \frac{r_3 - r_2}{4\pi r_2 r_3 k_2}$$

$$Q_r = \frac{T_{a1} - T_1}{R_{f1}} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_{a1} - T_2}{R_{f1} + R_1} = \frac{T_{a1} - T_3}{R_{f1} + R_1 + R_2} = \frac{T_3 - T_{a2}}{R_{f2}} = \dots$$

Soru: İç çapı 9 cm ve dış çapı 10 cm olan çelik bir borunun ($k_1=35 \text{ W/mK}$) üzeri 4 cm kalınlığında ısı iletim katsayısı $0,05 \text{ W/mK}$ olan cam yünü ile kaplanmıştır. Borunun iç yüzey Sıcaklığı 90°C , dış ortam sıcaklığı 15°C ve dış taraftaki ısı taşınım katsayısı $23 \text{ W/m}^2\text{K}$ olduğuna göre:

a) Isı geçişini, çelik boru ile cam yünü arasındaki ara yüzeyin sıcaklığını çelik borudaki ve yalıtım tabakasındaki sıcaklık düşmelerini hesaplayınız ve yorumlayınız.

b) Yapılan yalıtımın faydalı olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$D_1 = 9 \text{ cm} \rightarrow r_1 = 4,5 \text{ cm}$$

$$D_2 = 10 \text{ cm} \rightarrow r_2 = 5 \text{ cm}$$

$$t_y = 4 \text{ cm}$$

$$r_3 = r_2 + t_y = 5 + 4 = 9 \text{ cm}$$

$$h_d = 23 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$k_1 = 35 \text{ W/mK}$$

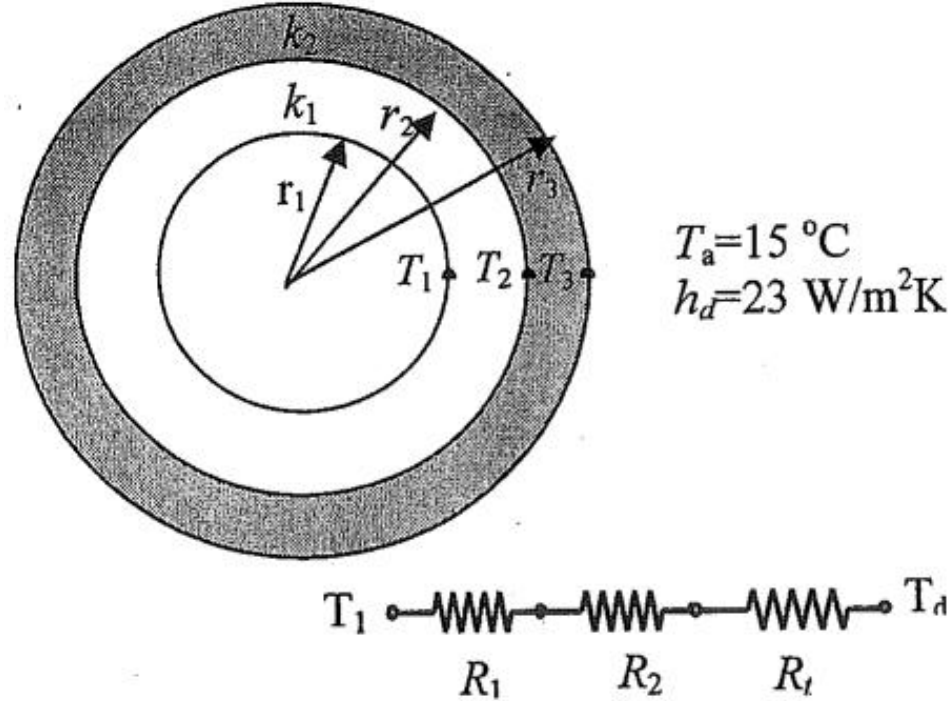
$$k_2 = 0,05 \text{ W/mK}$$

$$T_a = 15^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 90^\circ\text{C}$$

$$q = ?$$

$$T_2 = ?$$



a) Birim boy için ısı geçişi;

$$q = \frac{T_1 - T_d}{R_1 + R_2 + R_{td}} = \frac{T_1 - T_d}{R_{top}}$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi k_1} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi 35} \ln \frac{5}{4,5} = 0,00048 \text{ K/W}$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi k_2} \ln \frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{2\pi 0,05} \ln \frac{9}{5} = 1,8719 \text{ K/W}$$

$$R_{td} = \frac{1}{2\pi h_d r_3} = \frac{1}{2\pi 23 \times 0,09} = 0,0769 \text{ K/W}$$

$$R_{top} = R_1 + R_2 + R_{td} = 0,00048 + 1,8719 + 0,0769 = 1,9493 \text{ K/W}$$

$$q = \frac{75}{1,9493} \rightarrow \mathbf{q = 38,47 \text{ W/m}}$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_1} \rightarrow T_2 = T_1 - qR_1 = 90 - 38,47 \times 0,00047$$

$$\mathbf{T_2 = 89,98^\circ C}$$

Çelik borudaki sıcaklık düşmesi;

$$\Delta T_b = T_1 - T_2 = 90 - 89,98 = \mathbf{0,02^\circ C}$$

Yalıtım tabakasındaki sıcaklık düşmesi;

$$\Delta T_{yal} = qR_2 = 38,47 \times 1,8719 = \mathbf{72,0^\circ C}$$

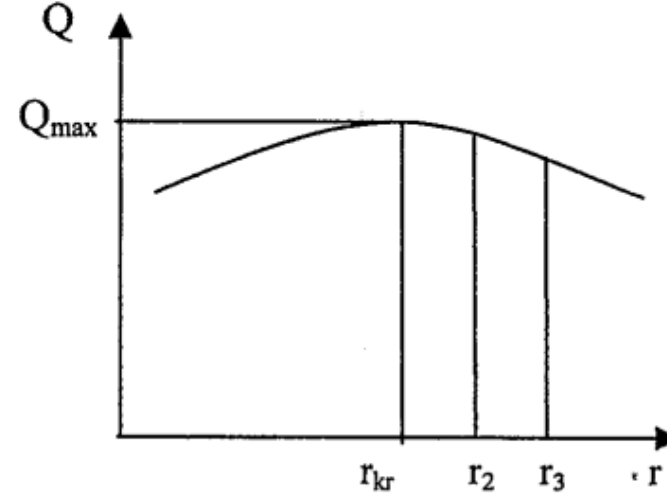
b) Yapılan yalıtımın faydalı olup olmadığı kritik yalıtım yarı çapı ile kıyaslanarak belirlenir.

$$r_{kr} = k_2/h_d = 0.05/23 = 0,0022\text{m}$$

$$r_{kr} = 0,22 \text{ cm}$$

$r_2 = 5 \text{ cm}$ idi, buna göre $r_{kr} < r_2$ olduğundan herhangi bir yalıtım ilavesi ısı geçişini azaltır. Faydalı bir ısı yalıtımıdır. Yalıtım yarı çapı r_3 daha büyüktür.

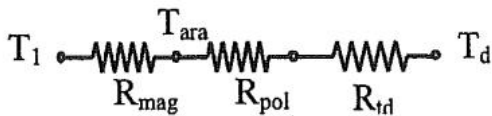
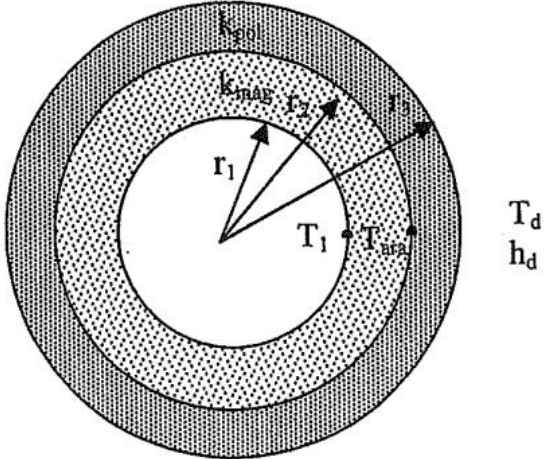
$$r_{kr} < r_2 < r_3$$



Soru: Dış çapı 5 cm olan çelik bir borunun üzeri önce 4,2 cm kalınlığında magnezyum ile ($k_1=0,07$ W/mK), magnezyumun üzerinde 2,4 cm kalınlığında poliüretan köpük ($k_2=0,035$ W/mK) ile kaplanmıştır. Çelik boru ile magnezyumun ara yüzey sıcaklığı 90°C , dış ortam sıcaklığı 20°C ve dış taraftaki ısı taşınım katsayısı 23 W/m²K dir. Birim boru boyundan olan ısı geçişini ve magnezyum ile poliüretan köpüğün ara yüzeyinin sıcaklığını hesaplayınız. Ayrıca çelik magnezyum ve poliüretan tabakalarındaki sıcaklık düşmelerini bulunuz?

Çözüm:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2,5 \text{ cm} = 0,025 \text{ m} \\ r_2 &= 2,5 + 4,2 = 6,7 \text{ cm} = 0,067 \text{ m} \\ r_3 &= 0,067 + 0,024 = 0,091 \text{ m} \\ h_d &= 23 \text{ W/m}^2\text{K} \\ k_{\text{mag}} &= 0,07 \text{ W/mK} \\ k_{\text{pol}} &= 0,035 \text{ W/mK} \\ T_d &= 20^\circ\text{C} \\ T_1 &= 90^\circ\text{C} \end{aligned}$$



$$R_{\text{mag}} = \frac{1}{2\pi k_{\text{mag}}} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi 0,07} \ln \frac{0,067}{0,025} = 2,242 \text{ K/W}$$

$$R_{\text{pol}} = \frac{1}{2\pi k_{\text{pol}}} \ln \frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{2\pi 0,035} \ln \frac{0,091}{0,067} = 1,393 \text{ K/W}$$

$$R_{\text{td}} = \frac{1}{2\pi r_3 h_d} = \frac{1}{2\pi 0,091 \times 23} = 0,076 \text{ K/W}$$

Birim boydan geçen ısı miltarı:

$$q = \frac{T_1 - T_d}{R_{\text{mag}} + R_{\text{pol}} + R_{\text{td}}} = \frac{90 - 20}{2,242 + 1,393 + 0,076} = \frac{70}{3,711}$$

$$q = 18,86 \text{ W/m}$$

Her tabakadan olan ısı geçişleri eşit olacağından ara yüzey sıcaklığı;

$$q = \frac{T_1 - T_{ara}}{R_{mag}} \rightarrow 18,86 = \frac{90 - T_{ara}}{2,242}$$

$$T_{ara} = 47,71 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Magnezyum ve poliüretan köpük tabakalarındaki sıcaklık düşmeleri:

$$q = \frac{\Delta T_{mag}}{R_{mag}} \rightarrow \Delta T_{mag} = qR_{mag} = 18,86 \times 2,242 = 42,28 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_{pol} = qR_{pol} = 18,86 \times 1,393 = 26,27 \text{ } ^\circ\text{C}$$

BÖLÜM 3-2

ISI ÜRETİMİ OLAN KATI CİSİMLERDE ISI İLETİMİ

Hazırlayan

Prof.Dr. Muhammet KAYFECİ

Kaynaklar

Afshin J. Ghajar, Yunus A. ÇENGEL, Isı ve Kütle Transferi, Palme Yayınevi, Türkçe Çeviri, 2015.

Fethi HALICI, Mehmet GÜNDÜZ, Örneklerle Isı Geçişi Isı transferi, Birsen Yayınevi, 2010.

Adrienne S. Lavine, David P. DeWitt, Frank P. Incropera, Theodore L.Bergman, Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri, Palme Yayıncılık, Türkçe Çeviri, 2015

ISI ÜRETİMİ OLAN KATI CİSİMLERDE ISI İLETİMİ

Katı cisim içinden geçen elektrik akımı, cisim içindeki kimyasal bir reaksiyon, nükleer fizyon ya da faz değişimi gibi durumlar, katı cisim içerisinde bir ısı kaynağı oluşturur.

Uygulamada en çok karşılaşılan durum tel ve levha gibi cisimler içerisinden elektrik akımı geçmesi sonucunda, cisim içinde yay ılı (homojen) ısı üretiminin olmasıdır. Elektrik akımı geçmesi halinde açığa çıkan ısı enerjisi,

$$\dot{E}_{\dot{u}} = I^2 R_{el} \quad (\text{W})$$

Burada I geçen akım (A), R_{el} elektrik direnci (ohm, Ω) ve $E_{\dot{u}}$ üretilen ısı enerjisidir (W).

Cismin hacmi V (m^3) olmak üzere birim hacim başına birim zamanda üretilen ısı miktarı,

$$\dot{q} = \frac{\dot{E}_{\dot{u}}}{V} = \frac{I^2 R_{el}}{V} \quad (\text{W}/\text{m}^3)$$

$$I = \frac{V}{R_{el}} \quad R_{el} = \rho_{el} \frac{L}{A_c}$$

V: volt olarak potansiyel farkı,

R_{el} : cinsinden elektrik direnci (Ω)

ρ_{el} : özgül elektrik direnci ($\Omega \text{ cm}$)

L cismin boyu (cm)

A_c : cismin kesit alanıdır (cm^2)

1.Düzlem levha hali

Isı iletiminin sadece bir yönde (x yönünde), devamlı rejimde ve ısı iletim katsayısının sabit olması durumunda, dikdörtgen koordinatlarda çıkarılan ısı iletiminin denkleminde:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Bu denklemin genel çözümü için iki defa integrali alınırsa;

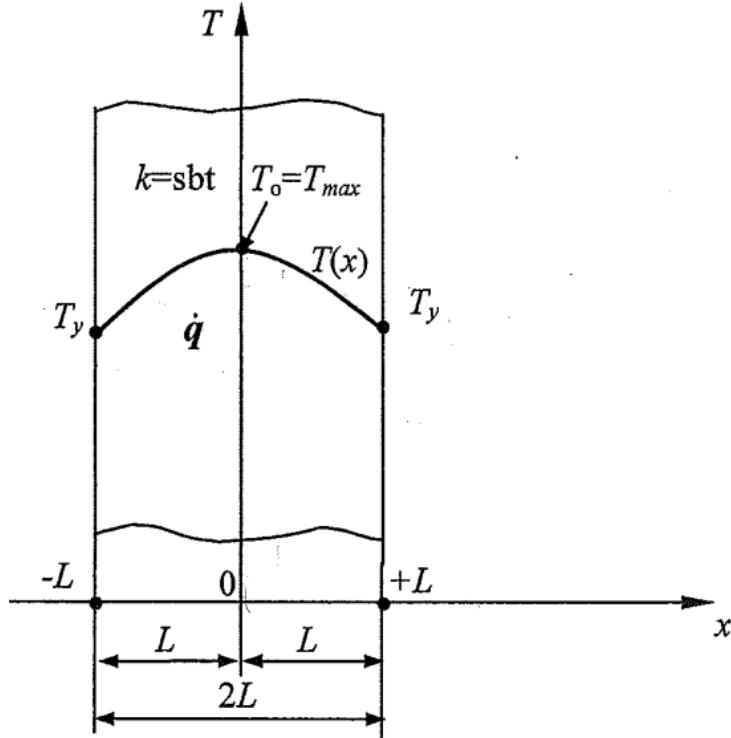
$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k}x + C_1$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

C_1 ve C_2 integral sabitleri sınır şartlar yardımı ile bulunur. Burada üç sınır şart için çözüm yapılacaktır.

a) Levhanın her iki yüzeyinin aynı sıcaklıkta olması hali

Isı üretimi olan levhanın her iki yüzeyi aynı sıcaklıkta ise Sınır şartlar:



$$x = L \Rightarrow T = T_y$$

$$x = -L \Rightarrow T = T_y$$

$$T_y = -\frac{\dot{q}}{2k}L^2 + C_1L + C_2$$

$$T_y = -\frac{\dot{q}}{2k}L^2 - C_1L + C_2$$

buradan da integral sabitleri,

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = T_y + \frac{\dot{q}}{2k}L^2$$

$$T(x) = T_y + \frac{\dot{q}}{2k}(L^2 - x^2)$$

Levha içinde maksimum sıcaklık

Maksimum sıcaklık yada merkezi sıcaklık, denklemde $x=0$ konularak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T_0 = T_{\max} = T_y + \frac{\dot{q}}{2k}L^2$$

Levha yüzeyindeki ısı akışı ve ısı geçişi

Yüzeydeki ısı akışı, ikinci sınır şart kullanılarak bulunabilir. İkinci sınır şartta, yüzeydeki ısı akışı için,

$$q_L = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} \quad T(x) = T_y + \frac{\dot{q}}{2k} (L^2 - x^2)$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\dot{q}}{2k} (L^2 - x^2) + T_y \right] = -\frac{\dot{q}}{k} L$$

$$q_L = -k \left(-\frac{\dot{q}}{k} L \right)$$

$$q_L = \dot{q} L$$

A levhanın bir yüzeyinin alanı olmak üzere levhanın her iki yüzeyinden olan toplam ısı geçişi,

$$Q = 2Aq_L = 2A \dot{q} L = V\dot{q}$$

Bu bağıntıda (2AL) levhanın hacmini (V) verir. O halde yayılı ısı üretimi halinde toplam ısı geçişi levhanın hacmi (V) ile birim zamanda birim hacimde üretilen ısı miktarının çarpımına eşittir.

b) Levhanın bir yüzeyi yalıtılmış ise

Yalıtma işlemi tam adyabatik kabul edildiğinden yalıtılmış yüzeydeki ısı geçişi sıfır kabul edilir. Bu durumda eksenler şekildeki gibi yerleştirilebilir. Denklemin genel çözümü yine aynıdır.

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

Burada sınır şartlar farklıdır. 1. ve 2. sınır şartlar geçerli olup;

$$x = 0 \text{ da } \frac{dT}{dx} = 0$$

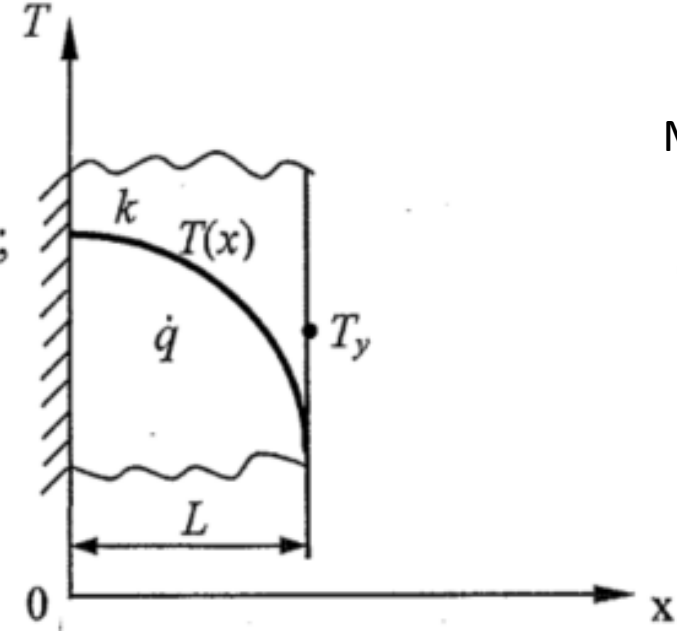
$$x = L \text{ de } T = T_y$$

dır. Bu sınır şartlara göre integral sabitleri,

$$C_1 = 0 \quad C_2 = T_y + \frac{\dot{q}}{2k}L^2$$

C1 ve C2 yerlerine konulursa, bir yüzeyi yalıtılmış düzlem levhadaki sıcaklık dağılımı için,

$$T(x) = T_y + \frac{\dot{q}}{2k}(L^2 - x^2)$$



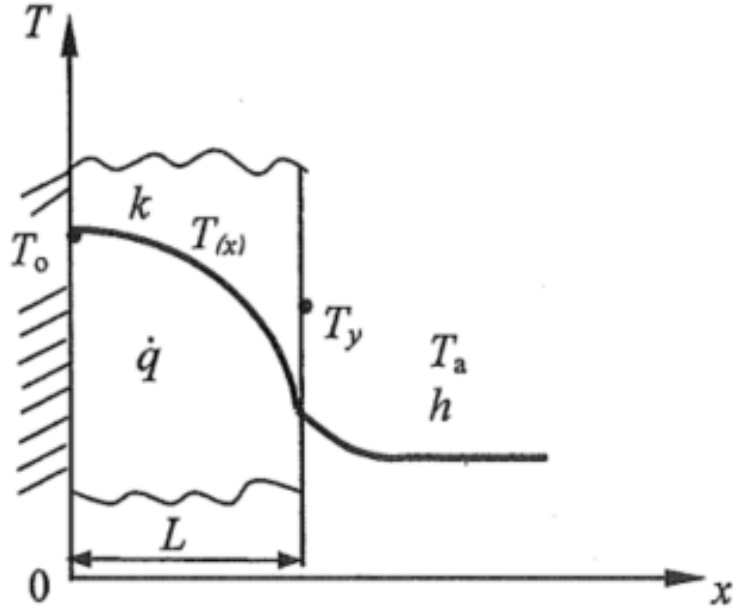
Maksimum sıcaklık

$$T_o = T_y + \frac{\dot{q}}{2k}L^2$$

Bir yüzeyi yalıtılmış levhadaki toplam ısı geçişi de denklem

$$Q = A \dot{q} L = V \dot{q}$$

c) Duvarın bir yüzeyi yalıtılmış ve diğer yüzeyinde akışkan olması hali



$$(1) \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = 0$$

$$(2) \quad x=L \quad \Rightarrow \quad T = T_y$$

$$(3) \quad x=L \quad \Rightarrow \quad -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T_y - T_a)$$

Değerler yerlerine yazılırsa; 1. ve 2. Sınır şartlarından,

$$T(x) = T_y + \frac{\dot{q}}{2k}(L^2 - x^2)$$

bulunur. 3. Sınır şartından yüzey sıcaklığı için;

$$-k\left(-\frac{\dot{q}}{k}L\right) = h(T_y - T_a)$$

$$T_y = \frac{\dot{q}L}{h} + T_a$$

Diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

$$T(x) = T_a + \frac{\dot{q} L}{h} + \frac{\dot{q}}{2k}(L^2 - x^2)$$

biçiminde bulunur. Newton'nun soğuma kanununa göre ısı akısı,

$$q = h (T_y - T_a)$$

dır ve burada T_y yerine yazılırsa ısı akısı ve ısı geçişi,

$$q = h \left[\left(\frac{\dot{q} L}{h} + T_a \right) - T_a \right]$$

$$q = \dot{q} L$$

$$Q = Aq = A\dot{q}L = V\dot{q}$$

Maksimum sıcaklık

$$T_o = T_{\max} = T_a + \frac{\dot{q} L}{h} + \frac{\dot{q}}{2k} L^2$$

Yüzey sıcaklığı biliniyorsa maksimum sıcaklık

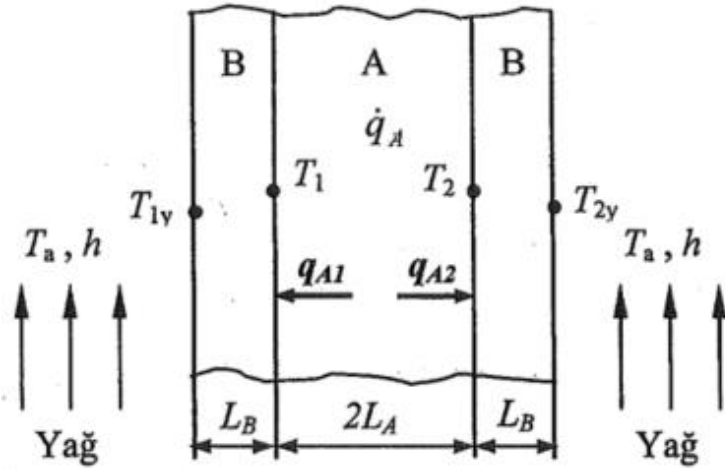
$$T_{\max} = T_y + \frac{\dot{q}}{2k} L^2$$

Soru: Şekilde görüldüğü gibi 40 mm kalınlığındaki sonsuz uzunluk ve genişlikteki A plakasının ($k=45 \text{ W/mK}$) her iki yüzü 15 mm kalınlığında B malzemesi ($k=20 \text{ W/mK}$) ile kaplanmıştır. A plakasında yayılı ısı üretimi $\dot{q} = 2,5 \times 10^6 \text{ W/m}^3$ olan elektrik akımı ile sağlanan bir ısı kaynağı vardır. B kaplama malzemesinde ısı kaynağı yoktur. Kaplanmış olan A plakası, makine yağının ısıtılmasında kullanılmakta olup yağın sıcaklığı 75°C ve plakanın her tarafındaki ısı taşınım katsayısı $500 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'dir. Devamlı rejim halinde;

a) A ve B malzemeleri arasındaki sıcaklığı ve kaplamanın dış yüzey sıcaklığını bulunuz.

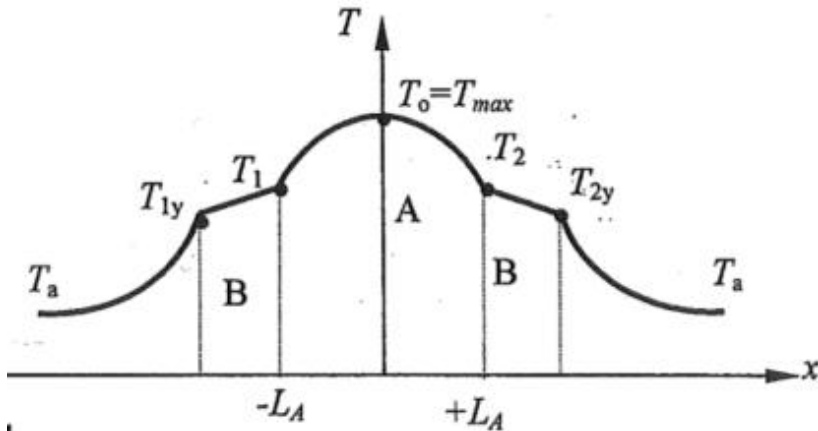
b) A duvarındaki maksimum sıcaklığı hesaplayınız.

c) Plakanın bir yüzeyinin alanının $0,85 \text{ m}^2$ olması halinde yağa geçen toplam ısı miktarını hesaplayınız.



Verilenler:

$$\begin{aligned}\dot{q}_A &= 2,5 \times 10^6 \text{ W/m}^3 \\ k_A &= 45 \text{ W/mK} \\ k_B &= 20 \text{ W/mK} \\ 2L_A &= 40 \text{ mm} \\ L_A &= 20 \text{ mm} = 0,02 \text{ m} \\ L_B &= 15 \text{ mm} \\ T_a &= 75^\circ\text{C} \\ h &= 500 \text{ W/m}^2\text{K}\end{aligned}$$

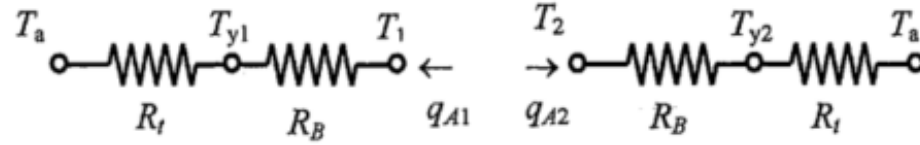


a) Kaplamalı plakanın her iki tarafındaki akışkan sıcaklıkları ve ısı taşınım katsayıları aynı olduğundan, her iki yüzey aynı kalınlıkta ve aynı malzeme ile kaplandığından yukarıda yapılan kabullere göre her iki taraftaki ısı akıları, kaplamaların iç yüzey sıcaklıkları ve dış yüzey sıcaklıkları birbirlerine eşit olur. ($q_{A1}=q_{A2}$, $T_1=T_2$ ve $T_{y1}=T_{y2}$). Denklem (3.19) dan ısı akısı;

$$q_{A1} = q_{A2} = q_A$$

$$q_A = \dot{q}_A L_A = 2,5 \times 10^6 \times 0,02 = 5 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

$$q_A = \frac{T_2 - T_a}{R_B + R_t}$$



$$R_B = \frac{L_B}{k_B} = \frac{0,015}{20} = 0,00075 \text{ Km}^2/\text{W}$$

$$R_t = \frac{1}{h} = \frac{1}{500} = 0,002 \text{ Km}^2/\text{W}$$

$$5 \times 10^4 = \frac{T_2 - 75}{0,00075 + 0,002}$$

$$T_2 = T_1 = 212,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

bulunur. Isı akısı dış yüzey ile akışkan arasında yazılarak dış yüzey sıcaklıkları;

$$q_A = \frac{T_{2y} - T_a}{R_t} \rightarrow 5 \times 10^4 = \frac{T_{2y} - 75}{0,002} \rightarrow T_{2y} = T_{1y} = 175 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) Maksimum sıcaklık sistem homojen ve simetrik olduğundan A plakasının orta eksen düzleminde dir. Buna göre denklem (3.19)' dan;

$$T_o = T_{\max} = T_1 + \frac{\dot{q}_A}{2k_A} L_A^2 = 212,5 + \frac{2,5 \times 10^6 \times 0,02^2}{2 \times 45}$$

$$T_o = 223,6^\circ \text{C}$$

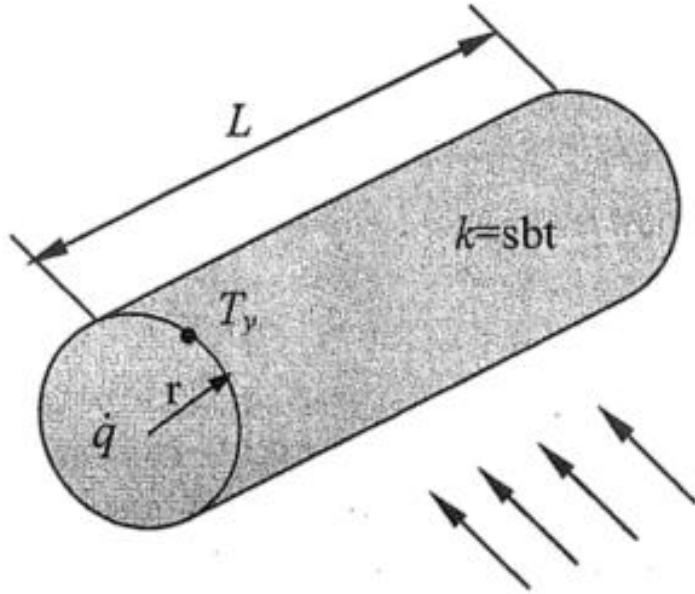
c) $0,85 \text{ m}^2$ alandan geçen ısı miktarı, ısı akısının iki yüzey alanı ile çarpılması ile bulunabilir.

$$Q = 2Aq_A = 2 \times 0,85 \times 5 \times 10^4 = 85000 \text{ W}$$

A plakasında üretilen toplam ısı miktarının, bu ısı geçişine eşit olması gerekir. Buna göre;

$$Q = V\dot{q}_A = A 2L_A \dot{q}_A = 0,85 \times 2 \times 2,5 \times 10^6 = 85000 \text{ W}$$

2.Silindirik yüzey hali



$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad ($$

Bu bağıntı çözüm kolaylığı açısından,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad ($$

şeklinde de yazılabilir. İntegrali alınırsa,

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r^2 + C_1$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r + \frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Sınır şartlar:

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad (\text{merkez ekseninde sıcaklık maksimumdur})$$

$$r = r_1 \quad \Rightarrow \quad T = T_y$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} \times 0 + \frac{C_1}{0} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$T_y = -\frac{\dot{q}}{4k}r_1^2 + 0 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_y + \frac{\dot{q}}{4k}r_1^2$$

C_1 ve C_2 katsayıları denklem 3.28'de yerlerine konulursa;

$$T(r) = T_y + \frac{\dot{q}}{4k}(r_1^2 - r^2)$$

Silindir içindeki maksimum sıcaklık

$$T_o = T_{\max} = T_y + \frac{\dot{q}}{4k} r_1^2$$

Isı akısının hesabı

$$q = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k \left(-\frac{2\dot{q}}{4k} r_1 \right)$$

$$q = \frac{\dot{q}}{2} r_1$$

Toplam ısı geçişi silindirin dış yüzey alanı ile ısı akısının çarpımı olacağından;

$$Q_r = Aq = A \frac{\dot{q}}{2} r_1$$

burada $A=2\pi r_1 L$ silindirin dış yüzey alanıdır yerine yazılırsa;

$$Q_r = 2\pi r_1 L \frac{\dot{q}}{2} r_1 = \pi r_1^2 L \dot{q}$$

olur. Burada $\pi r_1^2 L$ çarpımı silindirik çubuğun hacmidir ($V = \pi r_1^2 L$). Buna göre toplam ısı geçişi,

$$Q_r = V \dot{q}$$

dır. İçinde ısı üretimi olan silindir, T_{∞} sıcaklığında ve ısı taşınım katsayısı h olan bir akışkan ile soğutulması halinde dış yüzey için enerji dengesi yazılırsa;

$$\dot{q}\pi r_1^2 L = hA(T_y - T_{\infty}) = h(2\pi r_1 L)(T_y - T_{\infty})$$

olur. Buradan yüzey sıcaklığı T_y ,

$$T_y = T_{\infty} + \frac{\dot{q}r_1}{2h} \quad (3.33)$$

bulunur. Bu yüzey sıcaklığı denk.3,29 da yerine yazılarak akışkan sıcaklığına bağlı olarak sıcaklık dağılımı bulunur.

$$T(r) = \frac{\dot{q}}{4k}(r_1^2 - r^2) + T_{\infty} + \frac{\dot{q}r_1}{2h}$$

Örnek: Özgül direnci $70 \mu\Omega\text{cm}$ olan paslanmaz çelikten bir telin içerisinde 200 A akım geçmektedir. Bu tel 110°C sıcaklıktaki bir sıvı içerisine daldırılmış olup ısı taşınım katsayısı $h = 4 \text{ kW/m}^2\text{K}$ dir. Telin çapı 3 mm ve ısı iletim katsayısı 19 W/mK olduğuna göre telin dış yüzey ve merkez eksen sıcaklıklarını hesaplayınız?

Çözüm:

Verilenler:

$$\rho = 70 \mu\Omega\text{cm}$$

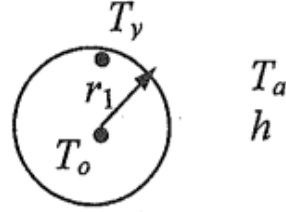
$$I = 200 \text{ A}$$

$$T_a = 110^\circ\text{C}$$

$$k = 19 \text{ W/mK}$$

$$h = 4000 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$r_l = 1,5 \text{ mm}$$



Kabuller: 1. Devamlı rejim, 2. Isı geçişi sadece r yönünde, 3. Özellikler sabit, 4. Işınım ihmal

Elektrik akımı geçmesi sonucu birim uzunluktaki (1 m) telde üretilen ısı miktarı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\dot{E}_u = I^2 R_e$$

$$R_e = \rho_e \frac{L}{A_c} = \rho_e \frac{L}{\pi r_l^2} = 70 \times 10^{-6} \frac{100}{\pi \times 0,15^2} = 0,099 \Omega$$

$$\dot{E}_u = 200^2 \times 0,099$$

$$\dot{E}_u = 3960 \text{ W}$$

Yapılan kabullere göre, direnç telinde üretilen bu ısı miktarı sabit rejimde direnç telinden taşınım ile sıvıya geçen ısı miktarına eşit olur.

$$\dot{E}_a = Q = hA(T_y - T_a)$$

$$\dot{E}_a = Q = h\pi dL(T_y - T_a)$$

$$3960 = 4000 \pi 0,003 \times 1 (T_y - 110)$$

$$T_y = 215,04^\circ\text{C}$$

Üretilen toplam ısı miktarından, birim zamanda birim hacim başına üretilen ısı miktarı,

$$Q = V\dot{q} = \pi \frac{d^2}{4} L \dot{q} \quad \dot{q} = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi \frac{d^2}{4} L} = \frac{3960}{\pi \frac{0,003^2}{4} \times 1} \quad \Rightarrow \quad 3960 = \pi \frac{0,003^2}{4} 1 \times \dot{q}$$
$$\dot{q} = 560509554 \text{ W/m}^3$$

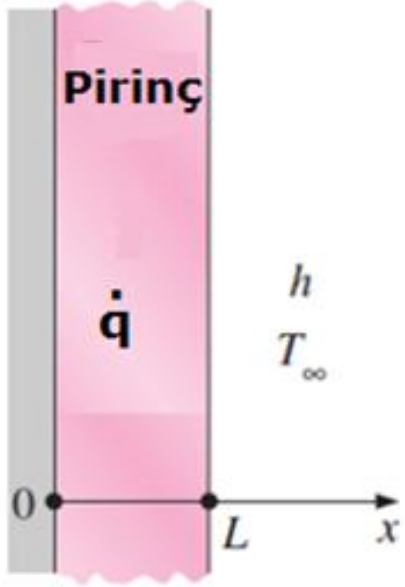
Telin merkez eksen sıcaklığı,

$$T_o = T_y + \frac{\dot{q}}{4k} r_1^2$$

$$T_o = 215,04 + \frac{560225399,6}{4 \times 19} 0,0015^2$$

$$T_o = 231,6^\circ\text{C}$$

Soru: Şekilde gösterildiği gibi 50 mm kalınlığındaki piring levha içerisinde $5 \times 10^5 \text{ W/m}^3$ üniform ısı üretimi vardır. Levhanın bir yüzeyi yalıtılmışken diğer yüzeyinde ısı taşınım katsayısı $44 \text{ W/m}^2\text{K}$ olan $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ çevre ortama açıktır. Levha üzerinde en yüksek ve en düşük sıcaklıklar nerelerde oluşur göstererek, her birinin değerini hesaplayınız? ($k = 110 \text{ W/mK}$)



$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}L}{h} = 25^\circ\text{C} + \frac{(2 \times 10^5 \text{ W/m}^3)(0.05 \text{ m})}{44 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} = \mathbf{252.3^\circ\text{C}}$$

$$T_o = T_s + \frac{\dot{q}L^2}{2k} = 252.3^\circ\text{C} + \frac{(2 \times 10^5 \text{ W/m}^3)(0.05 \text{ m})^2}{2(110 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C})} = \mathbf{254.5^\circ\text{C}}$$

Soru: Bir elektrikli şofbenin 1200 W'lık direnç teli 120 cm uzunlukta ve $D = 0,2$ cm çapındadır. Telin ısı iletkenliği 20 W/mK'dir. Buna göre; Telin birim hacmindeki enerji üretimini ($\dot{q}$), telin birim alanından çıkan ısıyı (q) ve yüzey sıcaklığı 120 °C ise telin orta merkezindeki sıcaklığı (T_o) hesaplayınız?

$$\dot{q} = \frac{q}{V} = \frac{P}{V} = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4} \cdot L}$$

$$P = 1200 \text{ W} \quad D = 0,2 \text{ cm} \quad L = 120 \text{ cm}$$

$$\dot{q} = \frac{1200}{\frac{\pi (0,2)^2}{4} \cdot 120} = 318,31 \Rightarrow \boxed{\dot{q} \approx 318,3 \frac{\text{W}}{\text{cm}^3}}$$

Aynı şekilde:

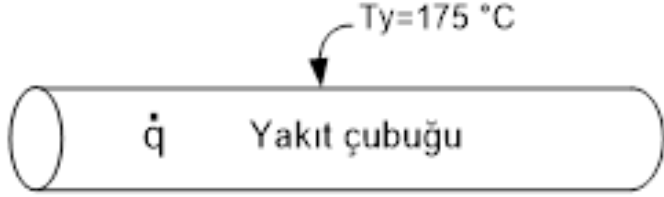
$$q'' = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi D L} = \frac{1200}{\pi \cdot 0,2 \cdot 120} = 15,915$$

$$q'' \approx 15,9 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

$$\boxed{q'' \approx 15,9 \times 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}$$

$$T_o = T_y + \frac{\dot{q}}{4k} r^2 = 120 + \frac{1\,590\,000}{4 \cdot 20} (0,001)^2 \text{ ise } T_o = 139,87 \text{ °C}$$

Soru: Bir nükleer reaktörde bulunan 5 cm çapındaki yakıt çubuğunu korumak için dış yüzeyinden suyla soğutulmaktadır. Çubukta üretilen ısı $\dot{q}=4 \times 10^7 \text{ W/m}^3$ ve çubuk yüzey sıcaklığı 175°C olduğuna göre çubuk merkezindeki sıcaklığı ve birim uzunluktan transfer olan ısı miktarını hesaplayınız? (Yakıt çubuğu için $k=29,5 \text{ W/mK}$)



BÖLÜM 3-3

GENİŞLETİLMİŞ YÜZEYLERDE ISI İLETİMİ

Hazırlayan

Prof.Dr. Muhammet KAYFECİ

Kaynaklar

1. Afshin J. Ghajar, Yunus A. ÇENGEL, Isı ve Kütle Transferi, Palme Yayınevi, Türkçe Çeviri, 2015.
2. Fethi HALICI, Mehmet GÜNDÜZ, Örneklerle Isı Geçişi Isı transferi, Birsan Yayınevi, 2010.
3. Adrienne S. Lavine, David P. DeWitt, Frank P. Incropera, Theodore L.Bergman, Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri, Palme Yayıncılık, Türkçe Çeviri, 2015

GENİŞLETİLMİŞ YÜZEYLERDE ISI GEÇİŞİ

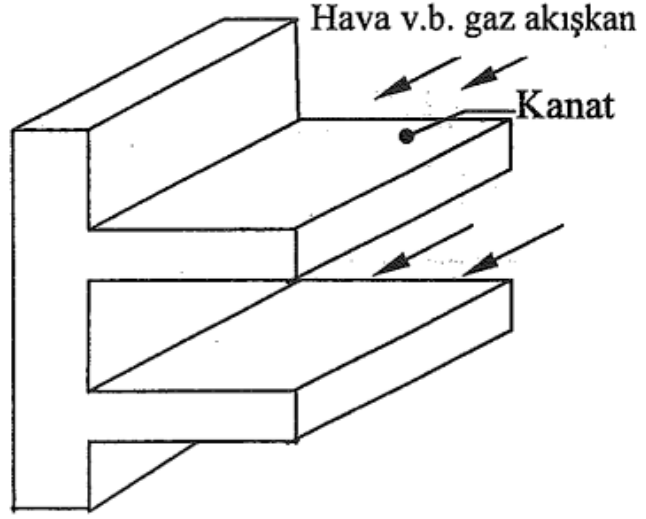
- Bir çok uygulamalarda birim hacim başına ısı geçişinin fazla olması istenir.

Genel olarak devamlı halde, bir cismin bir tarafındaki akışkan ile diğer tarafındaki akışkan arasındaki ısı geçişi genel olarak;

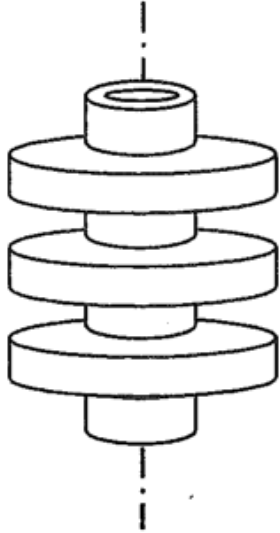
$$Q = U.A.\Delta T$$

- Konutlarda ve endüstrideki uygulamalarda birim hacimdeki ısı geçişinin yüksek olması istenir. Çünkü bu sayede ısı geçişi sağlayacak eleman hem az yer işgal eder hem de daha ucuza mal olur.
- Yukarıdaki bağıntıda ısı geçişini arttırmak için: Toplam ısı geçiş katsayısı U 'nun arttırılması, daha çok ısı iletim ve ısı taşınım katsayılarına bağlıdır. Isı iletim katsayısı, seçilen malzemeye göre sabittir. Isı taşınım katsayısı ise, akışkanın cinsi, fiziksel özellikleri, hızı gibi birçok etkene bağlıdır. Genelde gaz akışkanlarda ısı taşınım katsayısı çok küçüktür. Bu yüzden U 'nun arttırılması sınırlıdır.
- Sıcaklık farkı ΔT de, endüstrideki birçok uygulamalarda ve konut ısıtılmasında sınırlı bir değerdedir. Örneğin ısıtma tesisatlarında ΔT yaklaşık 50°C, klima sistemlerinde 20 °C ve otomobil radyatörlerinde de 60 °C civarlarındadır.

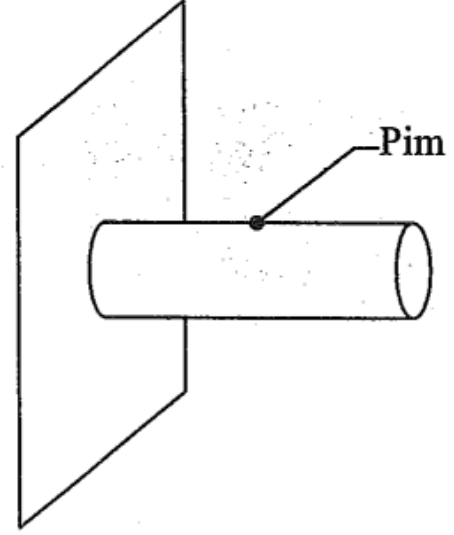
O halde ısı geişini arttırmanın en önemli yollarından bir tanesi de ısı geiş yüzeyinin (A) arttırılmasıdır.



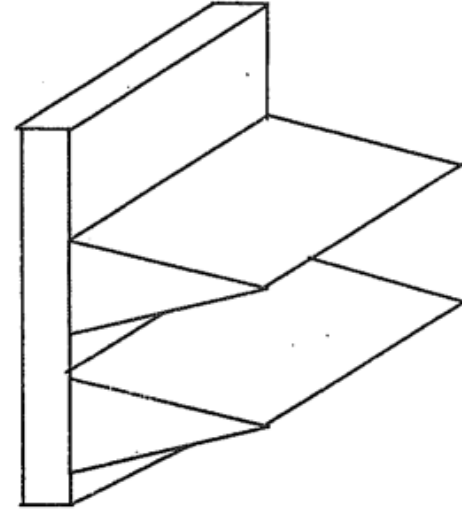
Dikdörgen kesitli levha kanat



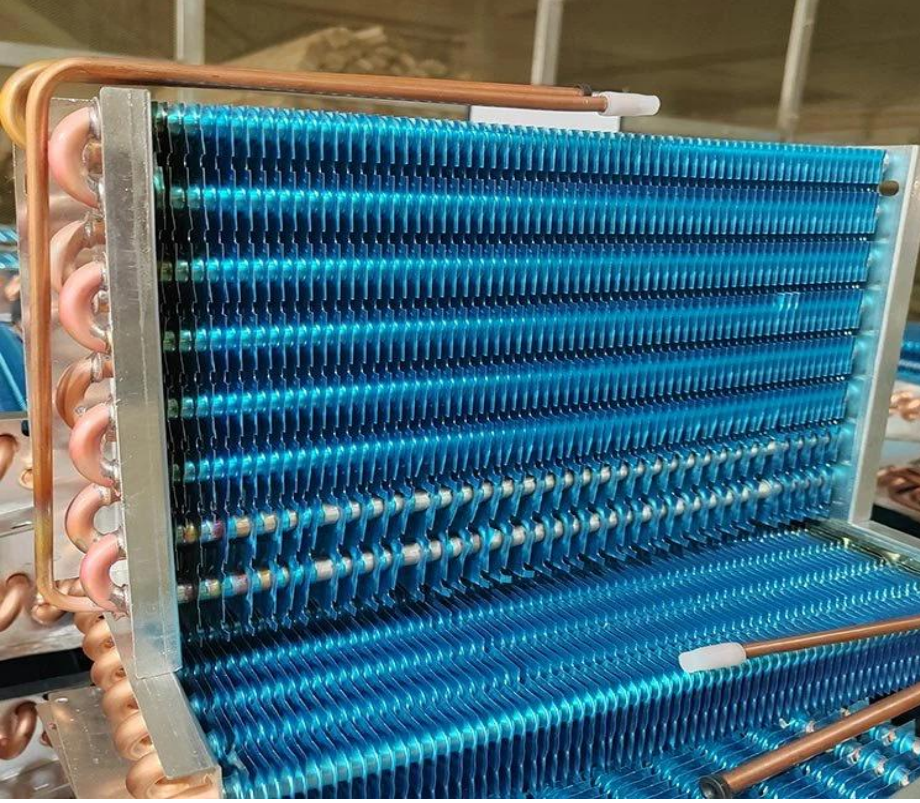
Dikdörgen kesitli dairesel kanat



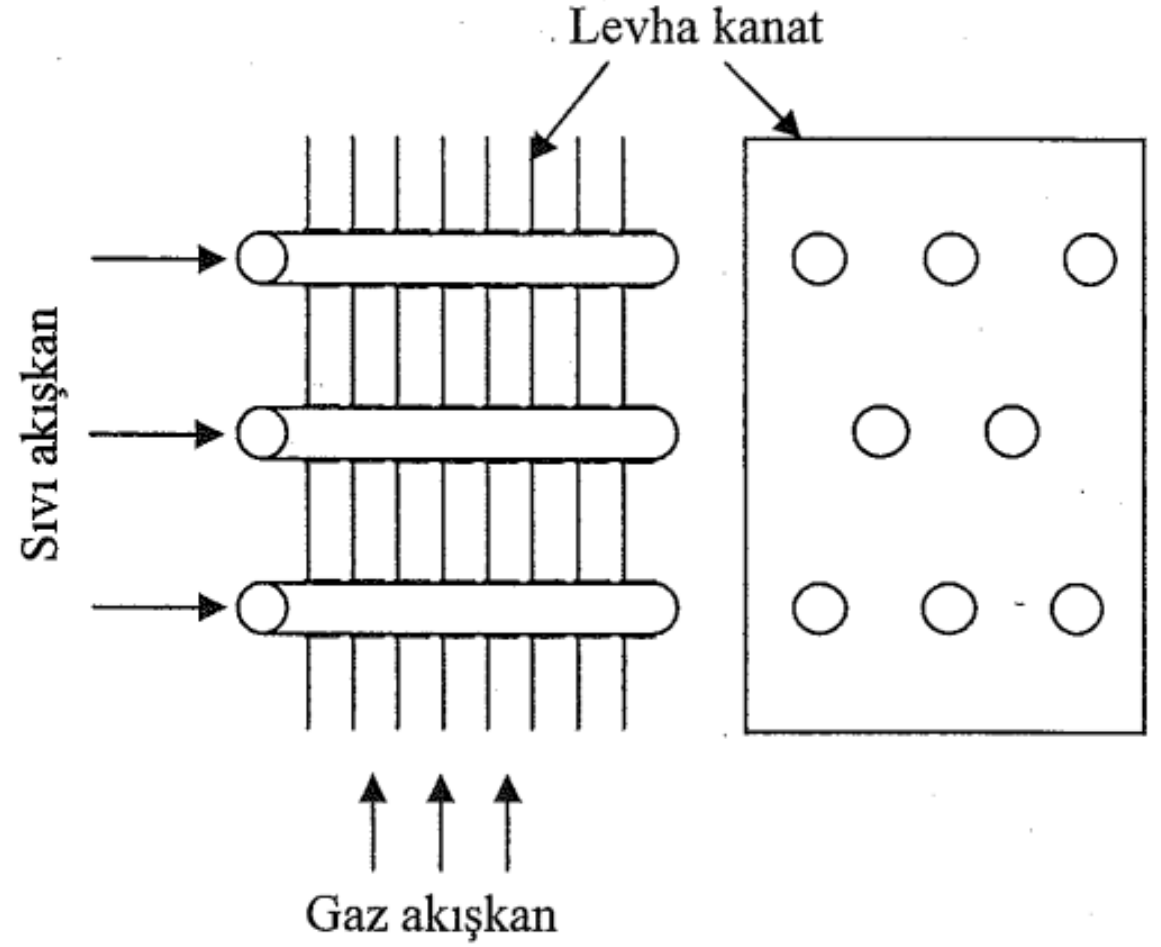
Pim kanat



Üçgen kesitli kanat

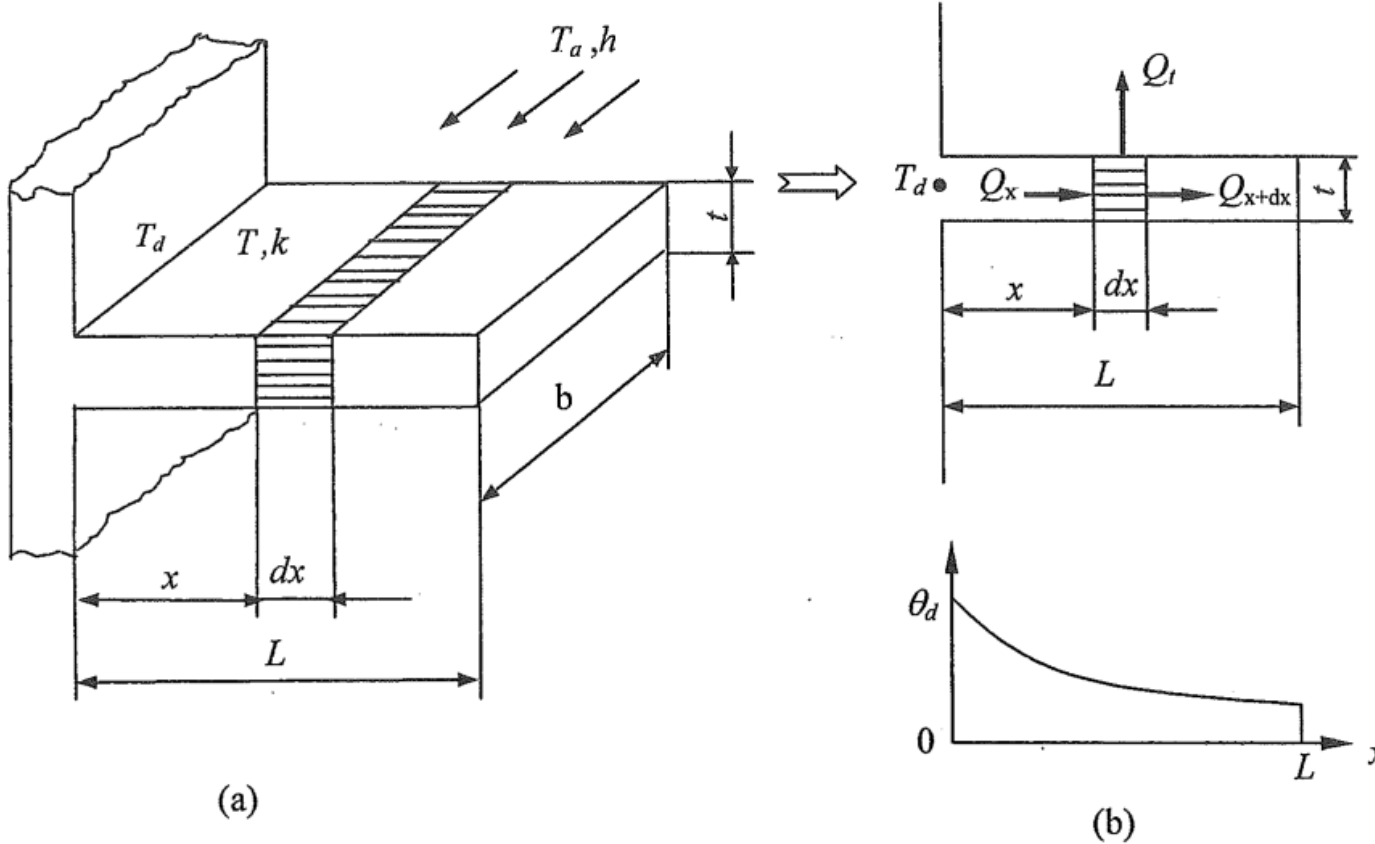


1) Kanatlı borulu ısı değiştiricisinin fotoğrafı.



1) Kanatlı borulu ısı değiştiricisinin şematik resmi.

1. Dikdörtgen kesitli levha kanatta ısı geçişi



Diferansiyel elemanın;

L : Kanadın boyu (yüksekliği yada uzunluğu)

b : Kanadın genişliği

t : Kanadın kalınlığı

$$P = 2b + 2t \quad (\text{Kanadın çevre uzunluğu})$$

$$A_c = bt \quad (\text{Kanadın ısı geçişi yönündeki dik kesit alanı})$$

$$A_k = P dx \quad (\text{Kanadın dış yüzey alanı})$$

Yukarıda yapılan kabullere göre diferansiyel elemanda ısı dengesi,

$$Q_x = Q_{x+dx} + Q_f$$

Kabuller: 1. Devamlı rejim, 2. Isı üretimi yok, 3. k ve h sabit, 4. Bir boyutlu ısı iletimi
5. Isı ışıınımı ihmal, 6. T_a ve T_d sabit.

$$Q_x = -k A_c \frac{dT}{dx}$$

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx = -k A_c \frac{dT}{dx} - k A_c \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

$$Q_l = h A_k (T - T_a)$$

$$Q_l = h P dx (T - T_a)$$

$$-k A_c \frac{dT}{dx} = -k A_c \frac{dT}{dx} - k A_c \frac{d^2 T}{dx^2} dx + h P dx (T - T_a)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h P}{k A_c} (T - T_a) = 0$$

$$\theta = T - T_a$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx} \quad , \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c} \theta = 0$$

Bu sabit katsayılı diferansiyel denklem de, sabit olan katsayı için,

$$\frac{hP}{kA_c} = m^2 \quad \rightarrow \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}$$

$$\theta'' - m^2 \theta = 0$$

Diferansiyel denklemin genel çözümünün e^{ax} olduğu kabul edilirse;

$$\theta = e^{\alpha x}$$

İki defa türevi alınırsa;

$$\theta'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$\alpha^2 e^{\alpha x} - m^2 e^{\alpha x} = 0$$

$$\alpha^2 - m^2 = 0$$

$$\alpha = \pm m$$

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

a) Sonsuz uzunluktaki kanat hali

Kanat boyunun çok uzun yada sonsuz uzunlukta olması halinde, kanadın uç sıcaklığının akışkan sıcaklığına eşit olduğu kabul edilebilir. Buna göre sınır şartlar aşağıdaki gibi olur.

$$1) \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_d \quad \theta = \theta_d \quad \text{veya} \quad \theta_d = T_d - T_a$$

$$2) \quad x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad T \rightarrow T_a, \quad \theta = T - T_a \quad \text{olduğundan} \quad \theta = 0 \quad \text{dır.}$$

Bu sınır şartlar altında $\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$ diferansiyel denkleminin çözümü;

(1) sınır şartından

$$\theta_d = C_1 e^{m \cdot 0} + C_2 e^{-m \cdot 0} = C_1 + C_2$$

(2) sınır şartından

$$0 = C_1 e^{m \cdot \infty} + C_2 e^{-m \cdot \infty} = C_1 \cdot \infty + C_2 \cdot 0$$

$$C_1 = 0$$

Bu değer 1. sınır şartta yerine yazılırsa, $C_2 = \theta_d$ olur. C_1 ve C_2 katsayıları

$$\theta = \theta_d e^{-mx}$$

$$\frac{\theta}{\theta_d} = e^{-mx}$$

Kanattan çevreye olan ısı geçişi (Q_k), kanadın dibinden kanada geçen ısı miktarına eşit olacağından, Fourier ısı iletim kanununa göre,

$$Q_k = -k A_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = k A_c \theta_d m e^{-mx} \Big|_{x=0} = k A_c m \theta_d \checkmark$$

olur ve,

$$m = \sqrt{\frac{h P}{k A_c}} \text{ olduğu dikkate alınırsa, } k A_c m = \sqrt{k h A_c P} \text{ olur ve,}$$

$$Q_k = \sqrt{k h A_c P} \theta_d$$

bulunur.

b) Kanat ucunun yalıtılmış olması hali

Kanat ucu yalıtılmış ise uç kısımdan akışkana ısı geçişi olmayacaktır. O halde kanat ucunda, sıcaklık dağılımının x e göre birinci türevi sıfır olur (2.sınır şart). Buna göre;

$$1) \quad x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_d \text{ veya } T = T_d$$

$$2) \quad x = L \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = 0$$

Bu sınır şartlar altında $\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$ diferansiyel denkleminin çözümü;

$$1) \text{ den; } \theta_d = C_1 + C_2$$

$$2) \text{ den; } \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = m C_1 e^{mL} - m C_2 e^{-mL} = 0$$

$$C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0$$

bulunur. 1 ve 2' den;

$$(\theta_d - C_2)e^{mL} - C_2e^{-mL} = 0$$

$$\theta_d e^{mL} - C_2 \Big(e^{mL} + e^{-mL}\Big) = 0$$

$$C_2 = \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \theta_d \qquad C_1 = \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \theta_d$$

$$\theta = \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \theta_d e^{mx} + \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{-mx} \theta_d$$

$$\theta = \frac{e^{-m\left(L-x\right)} + e^{m\left(L-x\right)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \theta_d$$

$$Q_k = \sqrt{k\,h\,A_c P}\,\theta_d\,\tanh mL$$

c) Kanat ucundan akışkana taşınım ile ısı geçişi olması

Kanat ucundan akışkana taşınım ile ısı geçişi olması halinde 4. sınır şart geçerlidir. Buna göre sınır şartlar aşağıdaki gibi olur.

$$1) \quad x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_d \text{ veya } T = T_d$$

$$2) \quad x = L \Rightarrow -k \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = h\theta_L = h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL})$$

Bu sınır şartlar altında $\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$ diferansiyel denkleminin çözümü;

$$1) \text{ den } \theta_d = C_1 + C_2 \rightarrow C_1 = \theta_d - C_2$$

$$2) \text{ den } -k \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = -k m (C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}) = h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL})$$

bulunur. 1 ve 2 den;

$$C_1 = \frac{\theta_d}{\frac{h+km}{-h+km} e^{2mL} + 1} \quad ; \quad C_2 = \frac{-\theta_d}{-1 + e^{-2mL} \frac{h-km}{h+km}}$$

$$\frac{\theta}{\theta_d} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/km) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/km) \sinh mL}$$

$$Q_k = -k A_c \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0}$$

yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$Q_k = m k A_c \theta_d \frac{(h/km) + \tanh mL}{1 + (h/km) \tanh mL}$$

denklemini bulunur. Bu bağıntı aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$Q_k = \sqrt{k h A_c P} \theta_d \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh mL + (h/km) \sinh mL}$$

d) Kanat ucunun belirli sıcaklıkta olması hali

Bazı ısı geçişi işlemelerinde iki levha, kanatlar ile birbirine bağlı olabilir. Dip levhalarının sıcaklıkları farklı olabildiği gibi aynıda olabilir (şekil 3.10). Bu ve buna benzer durumlarda kanat ucunun sıcaklığı belli bir değerde ise burada da 1. sınır şart geçerlidir . Sınır şartlar:

1) $x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_d$ veya $T = T_d$

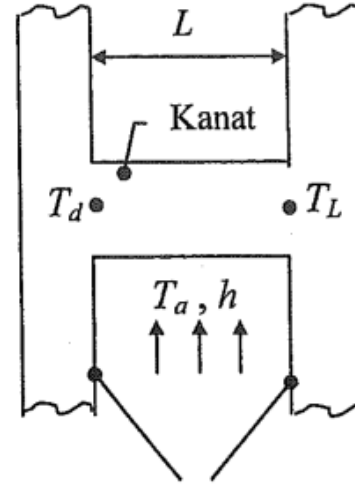
2) $x = L \Rightarrow \theta = \theta_L$ veya $T = T_L$

Bu sınır şartlara göre çözüm yapılırsa;

$$\frac{\theta}{\theta_d} = \frac{(\theta_L / \theta_d) \sinh mx + \sinh m(L - x)}{\sinh mL}$$

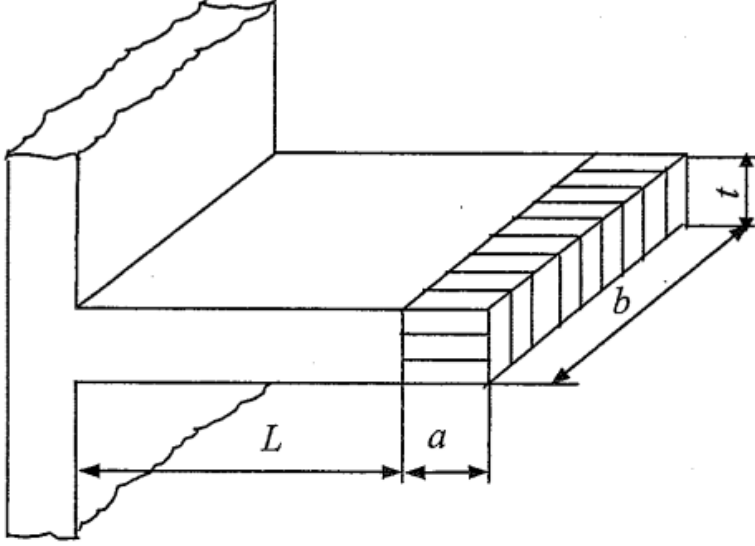
biçiminde sıcaklık dağılımı;

$$Q_k = \sqrt{h P k A_c} \theta_d \frac{\cosh mL - \theta_L / \theta_d}{\sinh mL}$$



Sabit T_d ve T_L sıcaklığında iki dip levhası

Düzeltilmiş Kanat Uzunluğu



$$Q_L = h A_c \theta_L = h A_a \theta_L$$

$$h b t \theta_L = 2 b a h \theta_L$$

$$a = \frac{t}{2}$$

olarak bulunur. Düzeltilmiş kanat uzunluğu L_c ;

$$L_c = L + t/2$$

$$Q_k = \sqrt{kh A_c P} \theta_d \tanh m(L + t/2)$$

Dairesel kesitli çubuk şeklindeki bir kanatta düzeltilmiş kanat uzunluğu (L_c) için benzer hesaplar yapıldığında aşağıdaki sonuç bulunur.

$$L_c = L + D/4$$

Kanat verimi

16

$$\text{Kanat verimi} = \frac{\text{Kanattan olan ısı geçişi}}{\text{Kanatın tüm yüzeylerinin kanat dip sıcaklığında olması halindeki ısı geçişi}}$$

$$\eta_k = \frac{Q_k}{Q_{\max}} = \frac{Q_k}{h A_k \theta_d}$$

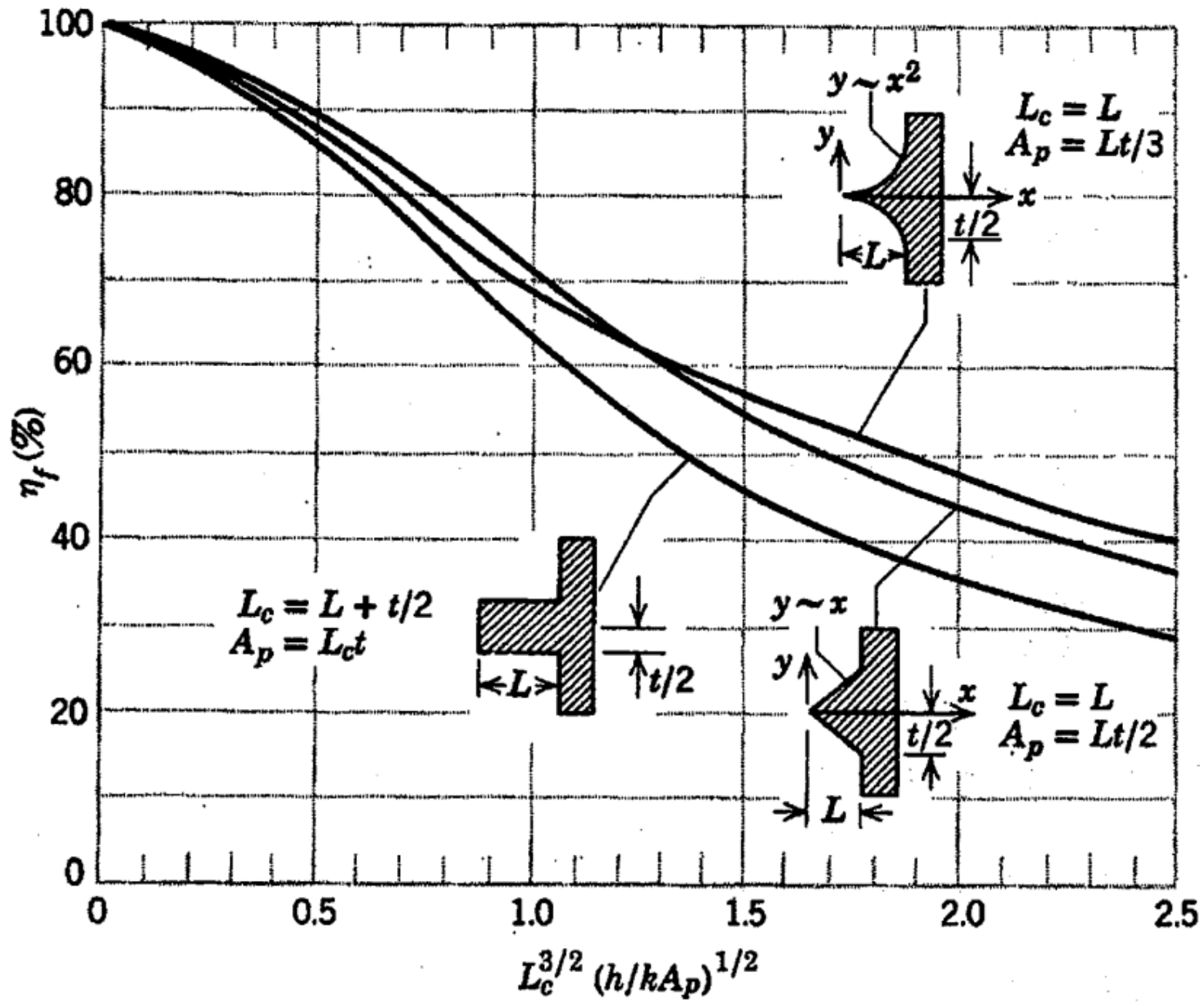
$$Q_k = \eta_k h A_k (T_d - T_a)$$

$$Q_{\max} = h A_k \theta_d = h P L (T_d - T_a)$$

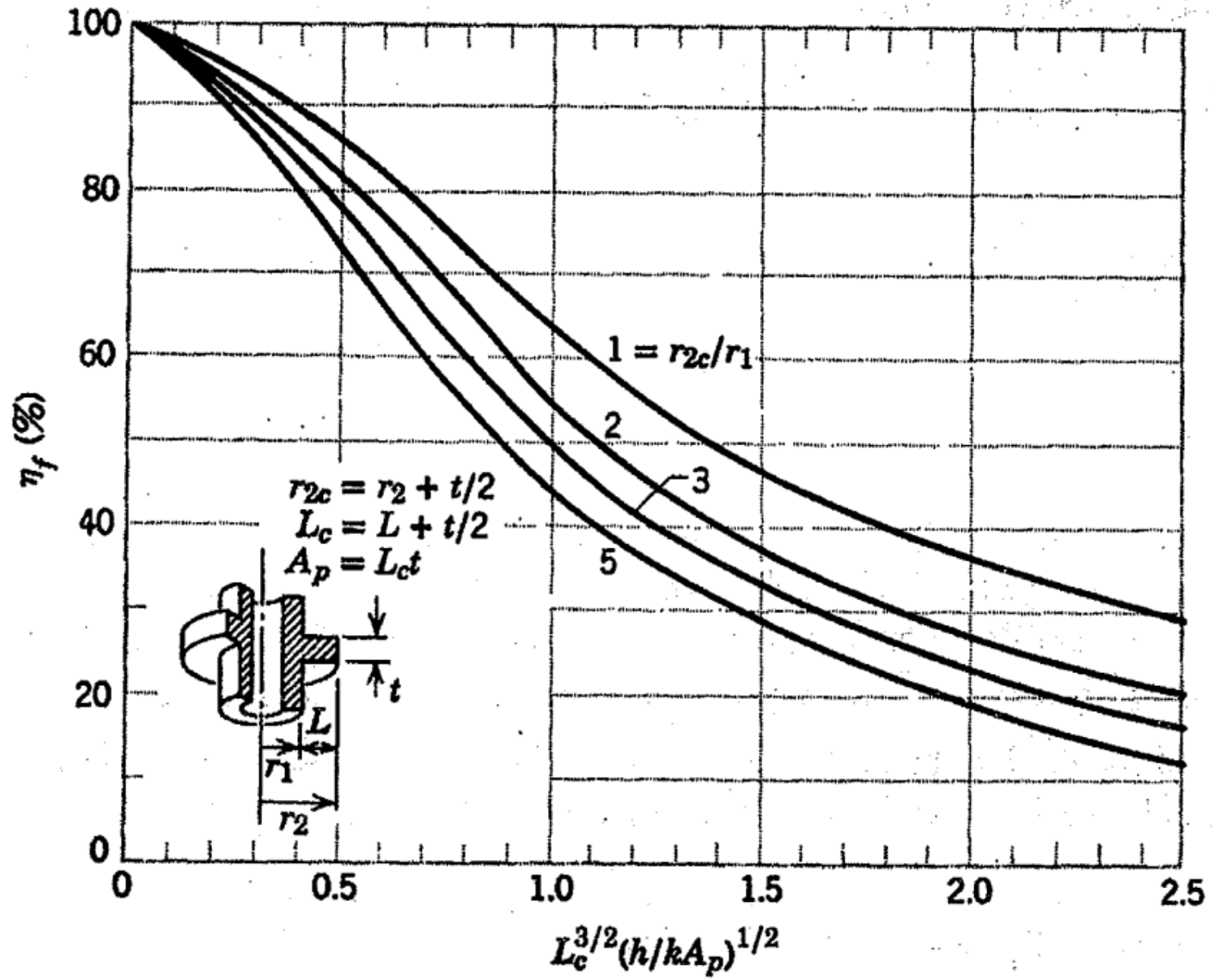
Buna göre kanat ucunun yalıtılmış olması halindeki kanat verimi,

$$\eta_k = \frac{\sqrt{khA_c P} \theta_d \tanh mL}{h P L \theta_d} = \frac{\tanh mL}{mL}$$

$$\eta_k = \frac{\tanh mL}{mL}$$



Dikdörtgen, üçgen ve parabolik kesitli boyuna kanatların verimleri.



Dikdörtgen kesitli dairesel kanadın verimi.

Toplam yüzey verimi

$$\eta_o = \frac{Q_{top}}{Q_{\max}}$$

$$Q_{top} = Q_d + Q_k$$

$$Q_{top} = hA_y \theta_d + NhA_k \eta_k \theta_d$$

Kanat etkenliği ve kanat kullanmanın uygunluğu

- Kanat ilavesi ile ısı geçişinde ne kadar bir artış olduğunu anlayabilmek için, kanat etkenliği tanımı kullanılır.
- Kanat etkenliği (ϵ_k), kanattan olan ısı geçişinin, kanatsız halde kanat dip yüzeyinden olan ısı geçişine oran olarak tanımlanır ;

$$\epsilon_k = \frac{Q_k}{Q_{k,d}} = \frac{Q_k}{h A_{c,d} \theta_d} \left(\frac{\text{Kanattan olan ısı geçişi}}{\text{Kanatsız halde kanat dip yüzeyinden olan ısı geçişi}} \right)$$

Pratik olarak $\epsilon_k > 2$ ise kanat kullanmak uygundur.

Denklemden kanattan olan geçişi için sonsuz uzunluktaki kanat alınarak çözüm yapılırsa kanat etkenliği için;

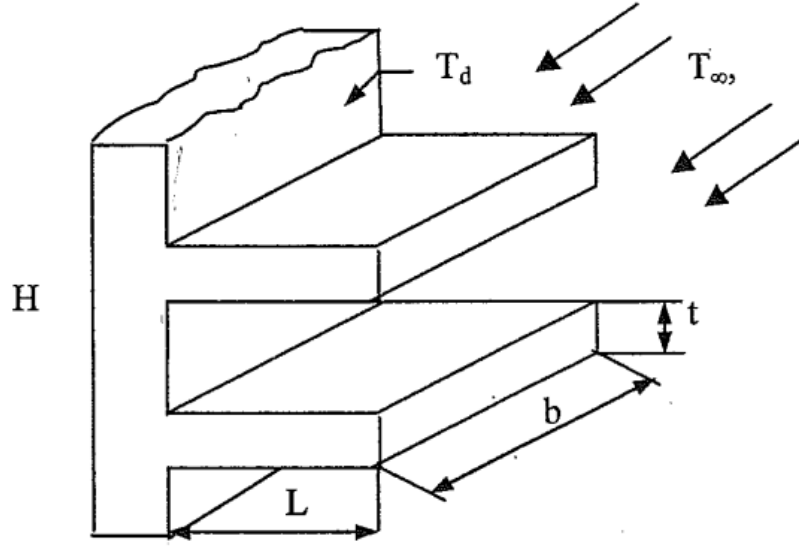
$$\epsilon_k = \frac{\sqrt{khA_{c,d}P}\theta_d}{hA_{c,d}\theta_d} = \left(\frac{kP}{hA_{c,d}} \right)^{1/2}$$

$$\epsilon_{top} = \frac{Q_k + Q_d}{Q_{k,siz}} \left(\frac{\text{Kanattan ve kanatsız dip yüzeylerden olan ısı geçişi}}{\text{Kanatsız haldeki tüm yüzeyden olan ısı geçişi}} \right)$$

$$Q_{k,siz} = h A_{k,siz} (T_y - T_{\infty})$$

Soru: Sıcaklığı $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ ve $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ boyutlarındaki dip levhasına dikdörtgen kesitli levha şeklindeki alüminyum kanatlardan, eşit aralıklarla 250 adet yerleştirilerek ısı geçişi artırılmak istenmektedir. Kanatlar 40 mm uzunluğunda ve $0,5\text{ mm}$ kalınlığında olup ısı iletim katsayısı 240 W/mK dır. Dip levhası ile ortam arasındaki $50\text{ W/m}^2\text{K}$ olan ısı taşınım katsayısı kanatlar eklendikten sonra $30\text{ W/m}^2\text{K}$ değerine düşmektedir. Ortam sıcaklığı $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ olduğuna göre ve ucu yalıtılmış kanat kabul ederek;

- Kanatsız ve kanatlı haldeki ısı geçişlerini hesaplayınız.
- Kanat verimini, kanat ve toplam kanat etkenliklerini bulunuz.



$$k = 240\text{ W/mK}$$

$$N = 250\text{ adet}$$

$$b = 1\text{ m}$$

$$t = 0,5\text{ mm}$$

$$H = 1\text{ m}$$

$$h = 50\text{ W/m}^2\text{K}$$

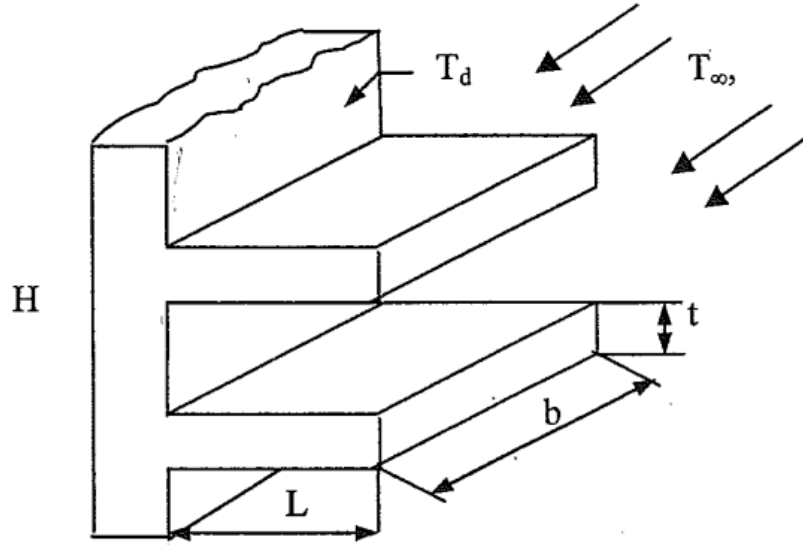
$$h_k = 30\text{ W/m}^2\text{K}$$

$$T_d = 90\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\infty} = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Soru: Sıcaklığı 90 °C ve 1 mx1 m boyutlarındaki dip levhasına dikdörtgen kesitli levha şeklindeki alüminyum kanatlardan, eşit aralıklarla 250 adet yerleştirilerek ısı geçişi artırılmak istenmektedir. Kanatlar 40 mm uzunluğunda ve 0,5 mm kalınlığında olup ısı iletim katsayısı 240 W/mK dir. Dip levhası ile ortam arasındaki 50 W/m²K olan ısı taşınım katsayısı kanatlar eklendikten sonra 30 W/m²K değerine düşmektedir. Ortam sıcaklığı 25 °C olduğuna göre ve ucu yalıtılmış kanat kabul ederek;

- Kanatsız ve kanatlı haldeki ısı geçişlerini hesaplayınız.
- Kanat verimini, kanat ve toplam kanat etkenliklerini bulunuz.



$$k = 240 \text{ W/mK}$$

$$N = 250 \text{ adet}$$

$$b = 1 \text{ m}$$

$$t = 0,5 \text{ mm}$$

$$H = 1 \text{ m}$$

$$h = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$h_k = 30 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$T_d = 90 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

Kanatsız halde geçen ısı miktarı;

$$Q_{ksts} = A_y h (T_d - T_\infty) = H b h (T_d - T_\infty) = 1 \times 1 \times 50 \times (90 - 25)$$

$$Q_{k,sız} = 3250 \text{ W}$$

Kanatlı haldeki ısı geçişi $Q_{k,li}$, kanat olmayan düz yüzeylerden ısı geçişi Q_d , ile N adet kanattan olan ısı geçişlerinin NQ_k toplamıdır.

$$Q_{top} = Q_d + NQ_k$$

$$Q_d = A_d h_k \theta_d = (H - Nt) b h_k \theta_d = (1 - 250 \times 0,5 \times 10^{-3}) \times 1 \times 30 (90 - 25)$$

$$Q_d = 1706,3 \text{ W}$$

Bir kanattan olan ısı geçişi,

$$Q_k = \sqrt{khA_c P \theta_d} \tanh(mL)$$

$$A_c = bt = 1 \times 0,5 \times 10^{-3} = 0,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$P = 2(b + t) = 2(1 + 0,5 \times 10^{-3}) = 2,001 \text{ m}$$

$$m = \sqrt{\frac{h_k P}{k A_c}} = \sqrt{\frac{30 \times 2,001}{240 \times 0,5 \times 10^{-3}}} = 22,36 \text{ m}^{-1}$$

$$Q_k = \sqrt{30 \times 240 \times 0,5 \times 10^{-3} \times 2,001 (90 - 25)} \tanh(22,36 \times 40 \times 10^{-3})$$

$$Q_k = 124,5 \text{ W}$$

Kanatlı halde toplam ısı geçişi,

$$Q_{top} = 1706,3 + 250 \times 124,5 = 32831,3 \text{ W}$$

Kanat konulması ile ısı geçişindeki artış miktarı;

$$\Delta Q = Q_{k,li} - Q_d = 32831,3 - 3100 = 29731,3 \text{ W}$$

b) Kanat etkenliği;

$$\varepsilon_k = \frac{Q_k}{Q_{k,d}}$$

$$Q_{k,d} = h \times A_{k,d} (T_d - T_\infty) = h \times b \times t (T_d - T_\infty) = 30 \times 1 \times 0,5 \times 10^{-3} (90 - 25) = 0,97 \text{ W}$$

$$\varepsilon_k = \frac{124,5}{0,97} = 128,3$$

Bu sonuçtan görüldüğü gibi kanat koymakla **kanat dip kısmından olan ısı geçişi 138,3 kat** artmıştır. Toplam kanat etkenliği;

$$\varepsilon_{top} = \frac{Q_{top}}{Q_{k,su}} = \frac{32831,3}{3250} = 10,1$$

Bu sonuçtan da görülebileceği gibi kanat kullanmak ısı geçişini 10,1 artırmıştır. Kanat verimi;

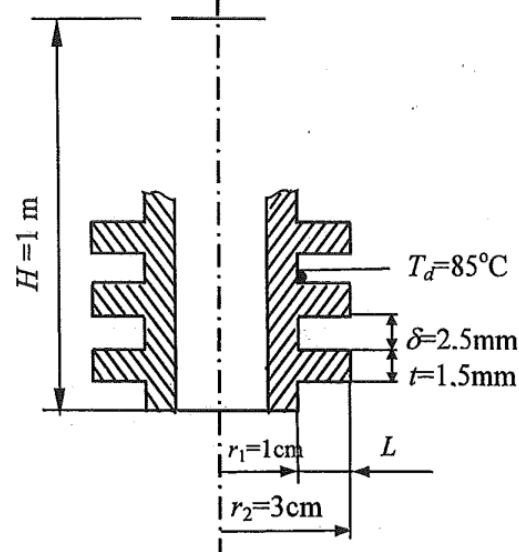
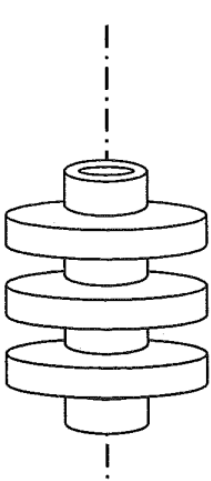
$$\eta_k = \frac{\tanh mL}{mL} = \frac{\tanh(22,36 \times 0,04)}{22,36 \times 0,04} = 0,797$$

$$\sinh(mL) = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2}$$

Soru: Bazı ortamların ısıtılmasında dikdörtgen kesitli dairesel kanatlı borular kullanılır. Böyle bir uygulamada içinden sıcak su geçen dairesel kanatlı bir borunun yüzey sıcaklığı 85 °C, dış ortam sıcaklığı 25 °C ve dış taraftaki ısı taşınım katsayısı 40 W/m²K olsun. Dış çapı 2 cm olan sıcak su borusunun üzerine yerleştirilen dairesel çelik (k = 45 W/mK) kanatların dış çapı 6 cm, kalınlığı 1,5 mm ve kanatlar arası mesafe de 2,5 mm olduğuna göre;

- a) Bir metre kanatlı boru uzunluğundan olan ısı geçişini ve kanatların ısı geçişinde meydana getirdiği artış miktarını hesaplayınız?
- b) Kanat etkenliğini ve toplam kanat etkenliklerini hesaplayarak kanat kullanmanın uygun olup olmadığını açıklayınız?

$$\begin{aligned} D_1 &= 2 \text{ cm} \rightarrow r_1 = 1 \text{ cm} \\ D_2 &= 6 \text{ cm} \rightarrow r_2 = 3 \text{ cm} \\ t &= 1,5 \text{ mm} \\ \delta &= 2,5 \text{ mm} \\ T_d &= 85^\circ \text{C} \\ T_\infty &= 25^\circ \text{C} \\ h &= 40 \text{ W/m}^2\text{K} \\ k &= 45 \text{ W/mK} \end{aligned}$$



- a) Kanatsız durumda borudan geçen ısı miktarı;

$$Q_{boru} = hA_y(T_d - T_\infty)$$

$$A_y = \pi \times D_i \times H = \pi \times 0,02 \times 1 = 0,062 \text{ m}^2$$

$$Q_{boru} = 40 \times 0,062 (85 - 25)$$

$$Q_{boru} = 148,8 \text{ W}$$

Kanatlı borudan olan ısı geçişi kanatsız dip kısımlardan olan ısı geçişi (Q_d) ile kanatlardan olan ısı (q_k) geçişlerinin toplamı olacağından;

$$Q_{top} = Q_d + Nq_k$$

Kanat sayısı N ;

$$N = \frac{L}{t + \delta} = \frac{1}{0,0015 + 0,0025} = 250 \text{ adet}$$

Kanatsız dip kısımlardan olan ısı geçişi;

$$Q_d = hA_d(T_d - T_\infty)$$

Kanatsız dip kısımların alanı A_d ,

$$A_d = A_y - NA_{k,d} = A_y - N\pi D_1 t = 0,062 - 250 \times \pi \times 0,002 \times 0,0015 = 0,059 \text{ m}^2$$

$$Q_d = 40 \times 0,059(85 - 25) = 141,6 \text{ W}$$

Bir kanattan olan ısı geçişi;

$$Q_k = \eta_k hA_k(T_d - T_\infty)$$

Kanat verimini grafiklerden bulabilmek için;

$$L = \frac{1}{2}(D_2 - D_1) = \frac{1}{2}(0,06 - 0,02) = 0,02 \text{ m (kanat yüksekliği)}$$

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 0,02 + \frac{0,0015}{2} = 0,02075 \text{ m (düzeltilmiş kanat)}$$

$$r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2} = 0,03 + \frac{0,0015}{2} = 0,03075 \text{ m}$$

$$A_p = L_c \times t = 0,02075 \times 0,0015 = 3,1 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_{2c}}{r_1} &= \frac{0,03075}{0,01} = 3,075 \\ L_c^{3/2} \sqrt{\frac{h}{kA_p}} &= (0,02075)^{3/2} \sqrt{\frac{40}{45 \times 3,1 \times 10^{-5}}} = 0,50 \end{aligned} \right\} \text{Şekil 3.13 diyagramından } \eta_k = 0,77$$

bulunur. Kanat dış yüzey alanı;

$$A_k = 2\pi(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_2 t = 2\pi(0,03^2 - 0,01^2) + 2\pi(0,03 \times 0,0015) = 0,0053 \text{ m}^2$$

Bulunanlar yerlerine yazılırsa bir kanat için ısı geçişi;

$$Q_k = \eta_k h A_k (T_d - T_\infty) = 0,77 \times 40 \times 0,0053(85 - 25) = 9,79 \text{ W}$$

$$Q_k = 9,79 \text{ W}$$

Toplam ısı geçişi;

$$Q_{\text{top}} = Q_d + NQ_k = 141,6 + 250 \times 9,79$$

$$Q_{\text{top}} = 2589,1 \text{ W}$$

Kanat konulması ile olan ısı geçişindeki artış miktarı;

$$\Delta Q = Q_{\text{top}} - Q_{\text{boru}} = 2589,1 - 148,8 = 2440,3 \text{ W}$$

b) Kanat etkenliği;

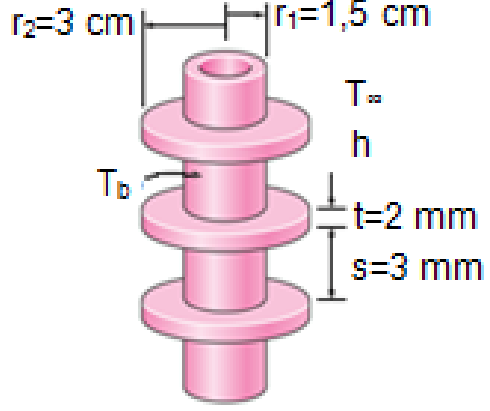
$$\varepsilon_k = \frac{q_k}{q_{k,d}}$$

$$q_{k,d} = h \times A_{k,d} (T_d - T_{\infty}) = h \times \pi \times D_1 \times t (T_d - T_{\infty}) = 40 \times \pi \times 0,02 \times 0,0015 (85 - 25) = 0,226 \text{ W}$$

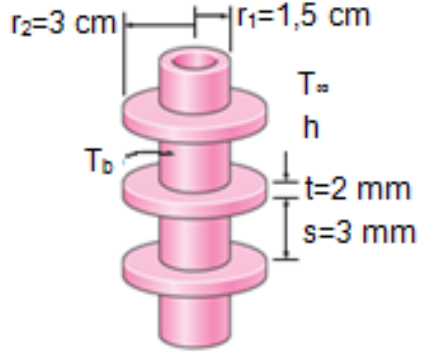
$$\varepsilon_k = \frac{9,79}{0,226} = 43,3$$

$$\varepsilon_{\text{top}} = \frac{Q_{\text{top}}}{Q_{\text{boru}}} = \frac{2589,1}{148,8} = 17,39$$

Soru: Bir ısıtma sisteminde buhar, duvarları 130°C 'de tutulan 3 cm dış çaplı borulardan akmaktadır. Borulara 6 cm dış çaplı ve 2 mm sabit kalınlıklı dairesel alüminyum alaşım kanatlar ($k=190 \text{ W/mK}$) eklenmiştir. Kanatlar arası boşluk 3 mm'dir; dolayısıyla borunun metre uzunluğu başına 200 kanat bulunmaktadır. Isı, $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$ 'deki çevre havasına $50 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'lik bir ısı transfer katsayısı ile transfer edilmektedir. Eklenen kanatlardan dolayı birim uzunluk başına borudan olan ısı transfer artışını (ϵ_{top}) bulunuz?



Soru: Bir ısıtma sisteminde buhar, duvarları 130°C 'de tutulan 3 cm dış çaplı borulardan akmaktadır. Borulara 6 cm dış çaplı ve 2 mm sabit kalınlıklı dairesel alüminyum alaşım kanatlar ($k=190 \text{ W/mK}$) eklenmiştir. Kanatlar arası boşluk 3 mm'dir; dolayısıyla borunun metre uzunluğu başına 200 kanat bulunmaktadır. Isı, $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$ 'deki çevre havasına $50 \text{ W/m}^2\text{K}$ 'lik bir ısı transfer katsayısı ile transfer edilmektedir. Eklenen kanatlardan dolayı birim uzunluk başına borudan olan ısı transfer artışını (ϵ_{top}) bulunuz?



$$\begin{aligned}
 A_{\text{no fin}} &= \pi D_1 L = \pi(0.03 \text{ m})(1 \text{ m}) = 0.0942 \text{ m}^2 \\
 \dot{Q}_{\text{no fin}} &= h A_{\text{no fin}} (T_b - T_{\infty}) \\
 &= (60 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.0942 \text{ m}^2)(120 - 25)^{\circ}\text{C} \\
 &= 537 \text{ W}
 \end{aligned}$$

The efficiency of the circular fins attached to a circular tube is plotted in Fig. 3–43. Noting that $L = \frac{1}{2}(D_2 - D_1) = \frac{1}{2}(0.06 - 0.03) = 0.015 \text{ m}$ in this case, we have

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{r_2 + \frac{1}{2}t}{r_1} &= \frac{(0.03 + \frac{1}{2} \times 0.002) \text{ m}}{0.015 \text{ m}} = 2.07 \\
 (L + \frac{1}{2}t) \sqrt{\frac{h}{kt}} &= (0.015 + \frac{1}{2} \times 0.002) \text{ m} \times \sqrt{\frac{60 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}{(190 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C})(0.002 \text{ m})}} = 0.207
 \end{aligned} \right\} \eta_{\text{fin}} = 0.95$$

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fin}} &= 2\pi(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_2 t \\
 &= 2\pi[(0.03 \text{ m})^2 - (0.015 \text{ m})^2] + 2\pi(0.03 \text{ m})(0.002 \text{ m}) \\
 &= 0.00462 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{\text{fin}} &= \eta_{\text{fin}} \dot{Q}_{\text{fin, max}} = \eta_{\text{fin}} h A_{\text{fin}} (T_b - T_{\infty}) \\
 &= 0.95(60 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.00462 \text{ m}^2)(120 - 25)^{\circ}\text{C} \\
 &= 25.0 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Heat transfer from the unfinned portion of the tube is

$$\begin{aligned}
 A_{\text{unfin}} &= \pi D_1 S = \pi(0.03 \text{ m})(0.003 \text{ m}) = 0.000283 \text{ m}^2 \\
 \dot{Q}_{\text{unfin}} &= h A_{\text{unfin}} (T_b - T_{\infty}) \\
 &= (60 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.000283 \text{ m}^2)(120 - 25)^{\circ}\text{C} \\
 &= 1.60 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Noting that there are 200 fins and thus 200 interfin spacings per meter length of the tube, the total heat transfer from the finned tube becomes

$$\dot{Q}_{\text{total, fin}} = n(\dot{Q}_{\text{fin}} + \dot{Q}_{\text{unfin}}) = 200(25.0 + 1.6) \text{ W} = 5320 \text{ W}$$

Therefore, the increase in heat transfer from the tube per meter of its length as a result of the addition of fins is

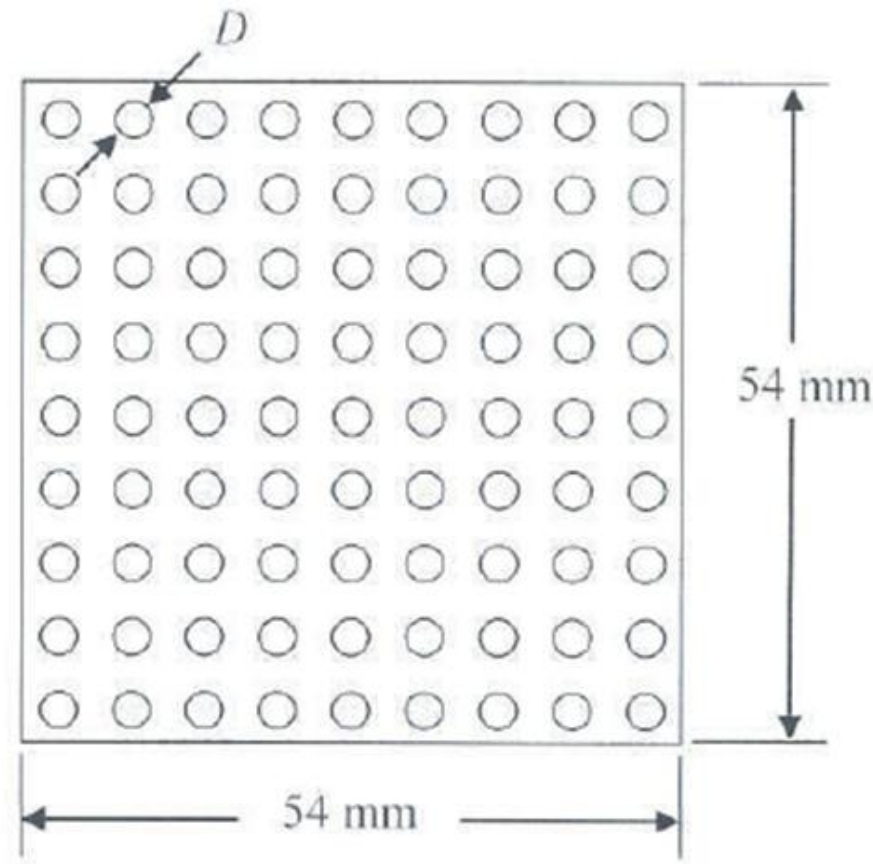
$$\dot{Q}_{\text{increase}} = \dot{Q}_{\text{total, fin}} - \dot{Q}_{\text{no fin}} = 5320 - 537 = \mathbf{4783 \text{ W}} \quad (\text{per m tube length})$$

Discussion The overall effectiveness of the finned tube is

$$\varepsilon_{\text{fin, overall}} = \frac{\dot{Q}_{\text{total, fin}}}{\dot{Q}_{\text{total, no fin}}} = \frac{5320 \text{ W}}{537 \text{ W}} = 9.9$$

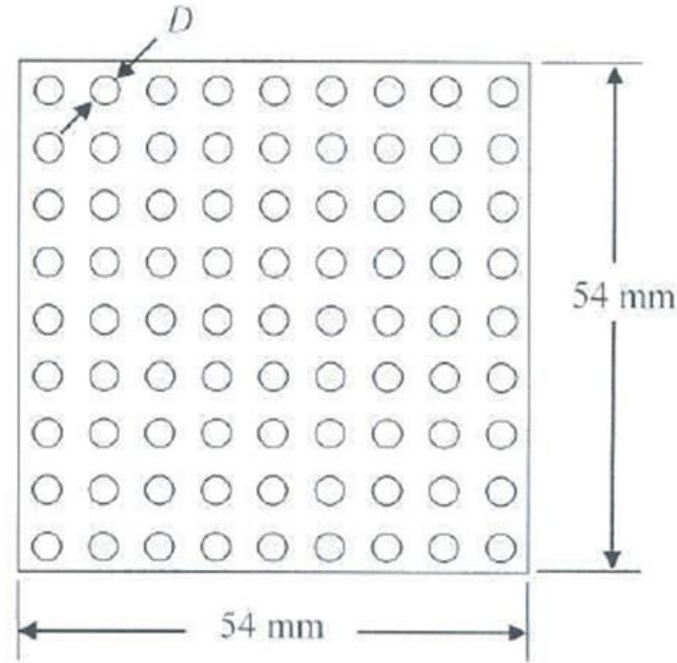
That is, the rate of heat transfer from the steam tube increases by a factor of almost 10 as a result of adding fins. This explains the widespread use of finned surfaces.

Kenarları 54×54 mm olan kare şeklindeki bir levha üzerine, çapı $D = 3$ mm, boyu 12 mm olan 81 adet dairesel kesitli kanatçık yerleştirilmiştir (Şekile bakınız). Bir elektronik elemanı soğutacak olan bu kanatlı yüzeyin, 40°C sıcaklıktaki yaz koşullarında dahi elemanı yanmaktan koruması istendiğine göre elektronik cihazın elektriksel güç sarfıyatı en çok kaç W olmalıdır? Elektronik elemanın dayanabileceği sıcaklık en fazla 85°C olup bu değer kanatların bulunduğu tabanın sıcaklığı olarak kabul edilebilir. Kanatlar ve taban ile ortam arasında doğal taşınım varsayımı ile $h = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ alınabilir. Kanat malzemesi duralumin olup ısı iletim katsayısı $k = 177 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ 'dir. (25 puan)

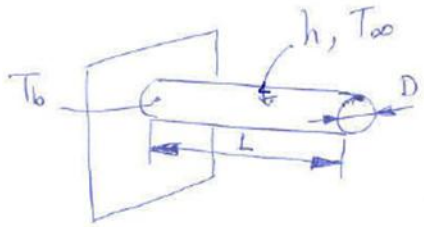


Kenarları 54×54 mm olan kare şeklindeki bir levha üzerine, çapı $D = 3$ mm, boyu 12 mm olan 81 adet dairesel kesitli kanatçık yerleştirilmiştir (Şekile bakınız). Bir elektronik elemanı soğutacak olan bu kanatlı yüzeyin, 40°C sıcaklıktaki yaz koşullarında dahi elemanı yanmaktan koruması istendiğine göre elektronik cihazın elektriksel güç sarfıyatı en çok kaç W olmalıdır? Elektronik elemanın dayanabileceği sıcaklık en fazla 85°C olup bu değer kanatların bulunduğu tabanın sıcaklığı olarak kabul edilebilir. Kanatlar ve taban ile ortam arasında doğal taşınım varsayımı ile $h = 20 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ alınabilir. Kanat malzemesi duralumin olup ısı iletim katsayısı $k = 177 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ 'dir.

(25 puan)



- 2) Kanatlı yüzeyden transfer olan ısı hesaplanacak.
(81 Kanat + Tabandaki kanatlar hariç yüzeyden çıkan ısı)
Bir kanattan çıkan ısı:



$$\begin{aligned} L &= 12 \text{ mm} \\ D &= 3 \text{ mm} \\ k &= 177 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \\ h &= 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_b &= 85^\circ\text{C} \\ T_{\infty} &= 40^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Kısa kanat kabulüyle
çözülebilir. Ancak
kısa kanat yerine ucu
yalıtılmışa dönüştürülürse
çözüm kolaylaşmış olur.

Düzeltilmiş boy $L_c = L + \frac{D}{4}$

$$L_c = 12 + \frac{3}{4} = 12,75 \text{ mm} \quad L_c = 0,01275 \text{ m}$$

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL)}{(mL)} \quad (\text{Ucu yalıtım için karat için verilen ifade})$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} = \sqrt{\frac{h \cdot \pi D}{k \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{4h}{kD}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20}{177 \times 0,01275}} = 12,27$$

$$m = 12,27 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\eta_f = \frac{\tanh(12,27 \times 0,01275)}{(12,27 \times 0,01275)} = \frac{0,15518}{0,15644} = 0,9919 \Rightarrow \eta_f \approx 0,99$$

$$q_f = \eta_f \cdot q_{\max} = \eta_f [h A_f (T_b - T_\infty)] = \eta_f [h (\pi D L_c) (T_b - T_\infty)]$$

$$q_f = 0,99 [20 (\pi \cdot 0,003 \cdot 0,01275) (85 - 40)] = 0,10707$$

$$q_f = 0,1071 \text{ W}$$

$$81 \text{ Konattan transfer olan ısı } q_{f,t} = 81 \cdot 0,1071 = 8,6727 \text{ W}$$

$$q_{f,t} = 8,6727 \text{ W}$$

Kanatsız taban alanı, $A_b = (54 \times 54) \times 10^{-6} - 81 \frac{\pi D^2}{4}$

$$A_b = (54 \times 54) \times 10^{-6} - 81 \frac{\pi (0,003)^2}{4} = 2,3434 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Tabandan transfer olan ısı $q_b = h A_b (T_b - T_\infty)$

$$q_b = 20 \cdot 2,3434 \times 10^{-3} (85 - 40) \Rightarrow q_b = 2,1091 \text{ W}$$

Kanatlı yüzeyin tamamından transfer olan ısı

$$q_t = q_{\text{fat}} + q_b = 8,6767 + 2,1091 = 10,7818 \text{ W}$$

$$q_t \approx 10,78 \text{ W}$$

Bir elektronik elemanı soğutmak üzere kanatçıklı yüzey (soğutucu eleman = *heat sink*) kullanılmaktadır. Şekli yanda görülen soğutucu elemanın ölçüleri aşağıda verilmiştir. Taban sıcaklığının $75\text{ }^{\circ}\text{C}$ olması durumunda, soğutucu elemandan çıkan ısıyı hesaplayınız. (25 puan)

$$H = 36\text{ mm}$$

$$W = 22\text{ mm}$$

$$L = 18\text{ mm}$$

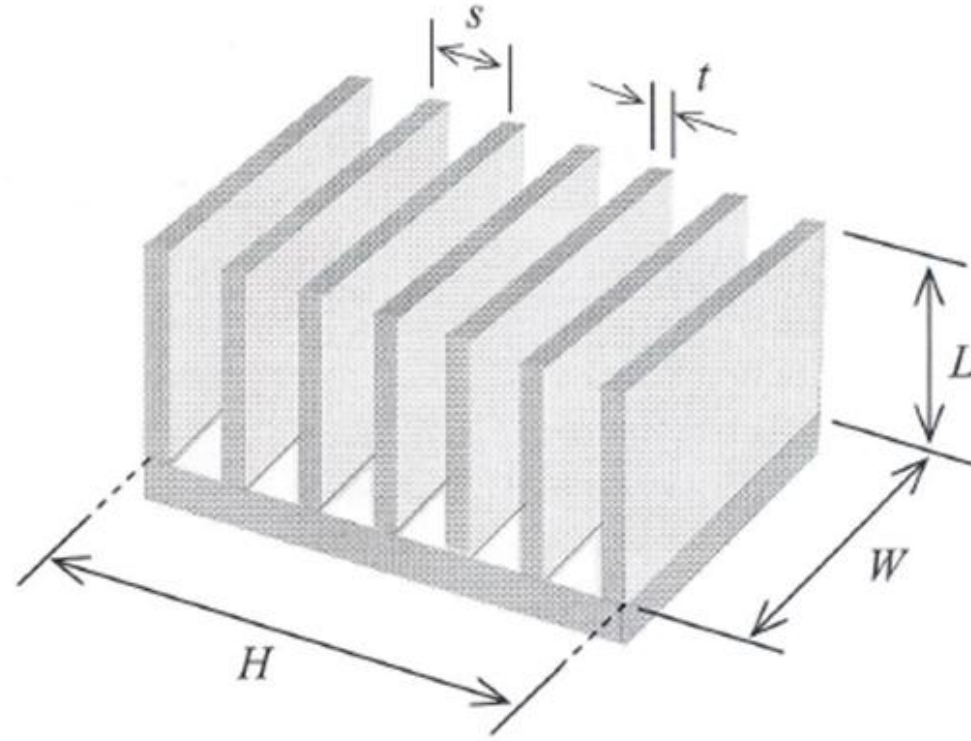
$$t = 2\text{ mm}$$

$$s = 6\text{ mm}$$

Malzeme: Alüminyum alaşımı 2024-T6

$$h = 35\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$$

$$T_{\infty} = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$$

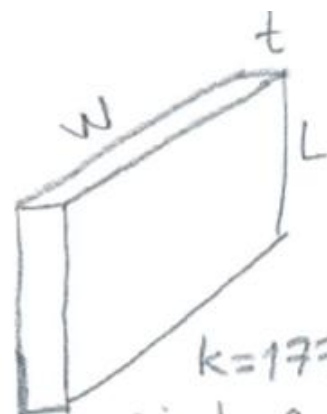


Üzerinde 7 kanataık
bulunan bir levha.

Bir kanataıktan transfer olan ısı:

$$q_f = \sqrt{h P k A_c} \Theta_b \tanh(m L_c)$$

$$\begin{aligned} W &= 22 \text{ mm} \\ L &= 18 \text{ mm} \\ t &= 2 \text{ mm} \end{aligned}$$



$$k = 177 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

Gizelge A-1, S: 895

(L yerine $L_c = L + \frac{t}{2}$ kullanılarak adyabatik uçlu kanat gibi alındı.)

$$P = 2(W + t) = 2(0,022 + 0,002) = 0,048 \text{ m}$$

$$A_c = W \cdot t = 0,022 \cdot 0,002 = 4,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$m = \sqrt{\frac{h P}{k A_c}} = \sqrt{\frac{35 \cdot 0,048}{177 \cdot 4,4 \times 10^{-5}}} = \sqrt{215,716} = 14,6873$$

$$q_f = \sqrt{35 \cdot 0,048 \cdot 177 \cdot 4,4 \times 10^{-5}} (75 - 25) \tanh(14,6873 \cdot 0,019)$$

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 18 + \frac{2}{2} = 19 \text{ mm} = 0,019 \text{ m}$$

$$q_f = \sqrt{0,013084} \cdot 50 \cdot 0,272034 = 1,5558 \text{ W} \quad \boxed{q_f \approx 1,556 \text{ W}}$$

$$q_{f,t} = 7 \cdot q_f = 7 \cdot 1,556 = 10,892 \text{ W} \quad \boxed{q_{f,t} = 10,892 \text{ W}}$$

Konatsız taban alanından çıkan ısı:

$$q_b = h A_b (T_b - T_\infty) \quad A_b = H \cdot W - 7 A_c$$

$$A_b = 0,038 \cdot 0,022 - 7 \cdot 4,4 \times 10^{-5} = 5,28 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$q_b = 35 \cdot 5,28 \times 10^{-4} (75 - 25) = 0,847 \text{ W} \quad \boxed{q_b = 0,924 \text{ W}}$$

$$q_t = q_{f,t} + q_b = 10,892 + 0,924 \Rightarrow \boxed{q_t = 11,816 \text{ W}}$$

BÖLÜM 3-4

ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ

Hazırlayan

Prof.Dr. Muhammet KAYFECİ

Kaynaklar

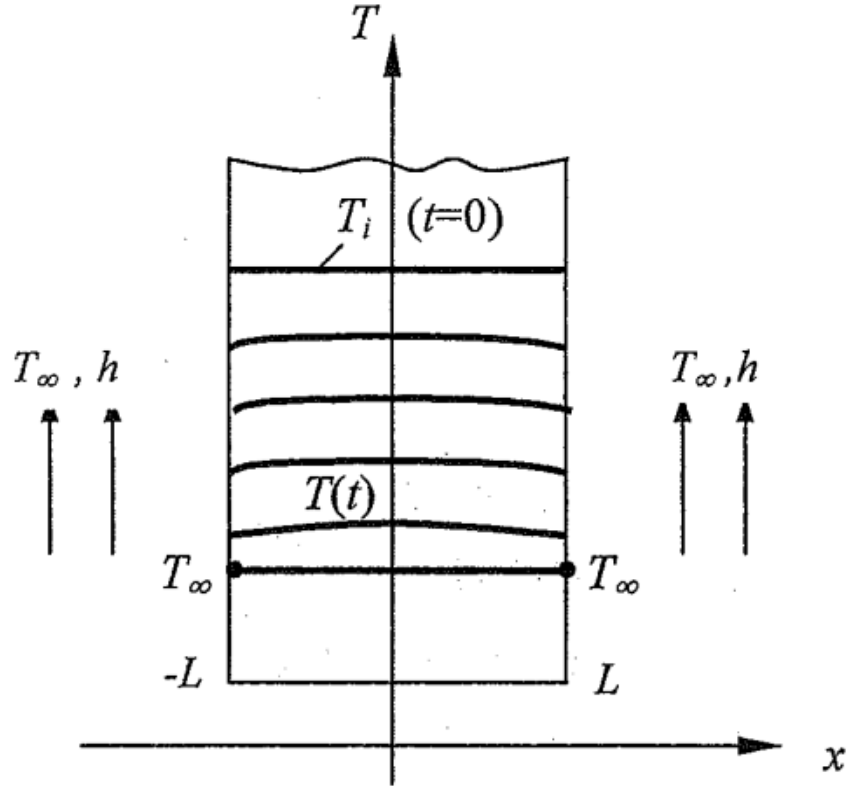
Afshin J. Ghajar, Yunus A. ÇENGEL, Isı ve Kütle Transferi, Palme Yayınevi, Türkçe Çeviri, 2015.

Fethi HALICI, Mehmet GÜNDÜZ, Örneklerle Isı Geçişi Isı transferi, Birsen Yayınevi, 2010.

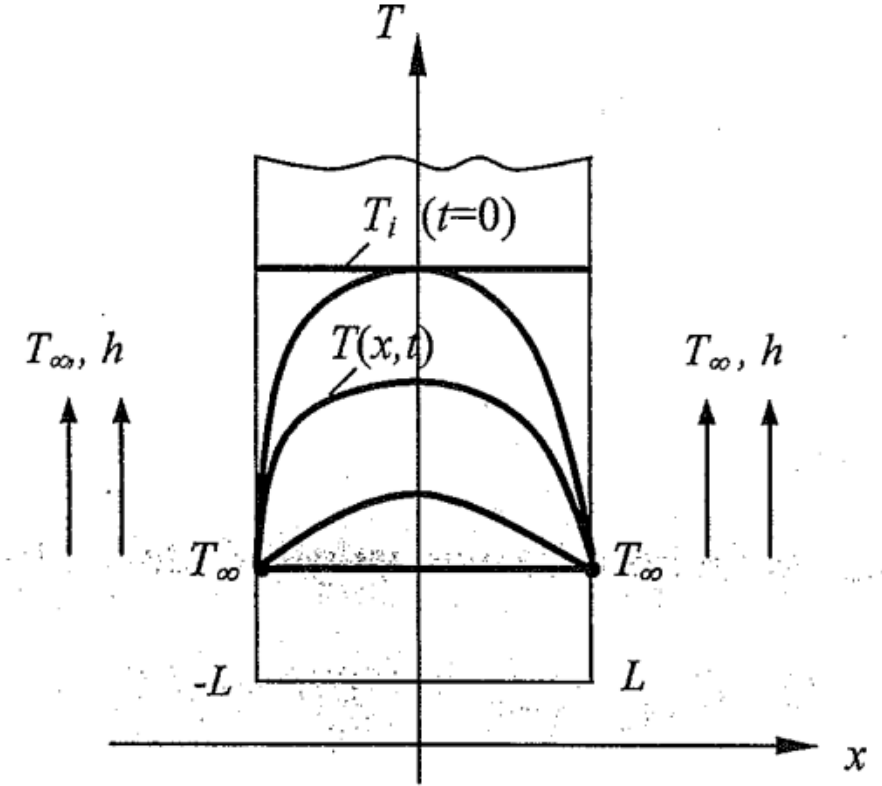
Adrienne S. Lavine, David P. DeWitt, Frank P. Incropera, Theodore L.Bergman, Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri, Palme Yayıncılık, Türkçe Çeviri, 2015

ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ

- Bir cisimde, ısı geçişi esnasında herhangi bir noktadaki sıcaklık zamanla değişiyor ise, bu ısı geçişine zamana bağlı ısı geçişi denir.
- Buna en güzel örnek, ısınmaya yada soğutulmaya bırakılmış cisimlerdir. Bir yağ veya su banyosunda, çeliğe su verilmesi esnasında çelik içindeki sıcaklık dağılımı zamanla değişmektedir.
- Zamana bağlı ısı iletimi, cismin içindeki sıcaklık basamağının ihmal edilip edilmemesine göre iki şekilde incelenebilir.
- Sıcak bir levha ani olarak soğuk bir akışkan içerisine daldırıldığında, levha içinde zamana göre değişen bir sıcaklık dağılımı meydana gelir. Başlangıçta ($t=0$ anında) cismin sıcaklığı T_i ve akışkan sıcaklığı T_∞ olması halinde cisim içindeki sıcaklık değişimi hem zamana göre hem de x boyutuna bağlıdır.



(a) Sıcaklık basamağı ihmal edilebilen hal



(b) Zamana bağlı genel sıcaklık dağılımı

Biot Sayısı (Bi)

- Cismin içinde x yönünde sıcaklık basamağının olup olmadığı Biot sayısı ile belirlenir.
- Cisme taşımınla geçen ısıнын, cisim içindeki iletimle olan ısıya oranına Biot Sayısı (Bi) denir.

$$Bi = \frac{h\Delta T}{k \frac{\Delta T}{L_c}} = \frac{hL_c}{k} \quad ; \quad L_c = \frac{V}{A}$$

- Burada L_c cismin hacminin (V), yüzey alanına (A) bölünmesi ile bulunan karakteristik uzunluktur.
- Bu bağıntıya göre L_c nin küçük olması buna karşın cismin ısı iletim katsayısının büyük olması Biot sayısını küçültmektedir.
- Eğer Biot sayısı 1 'den çok küçük ise, cisim içinde x 'e bağlı sıcaklık basamağı olmadığı kabul edilebilir (**Yığık sistem**) (Şekila). Bu durumda cismin sıcaklığı sadece zamanın fonksiyonudur ($T = T(t)$).

$$B_i = \frac{hL_c}{k} < 0,1$$

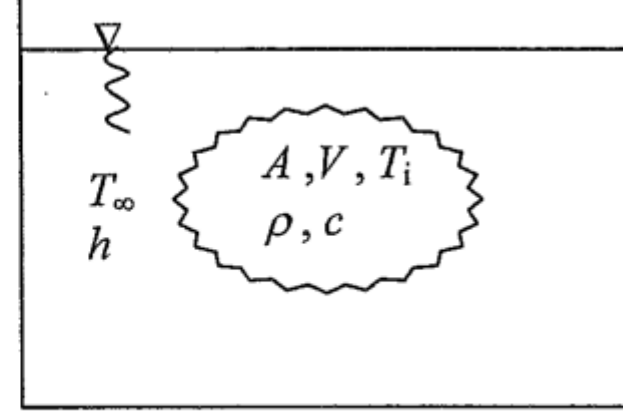
Eğer $Bi \geq 0,1$ ise çözüm içerisinde sıcaklık basamağı olan (**Yığık olmayan sistem**) (hem zamana, hem de yola bağlı çözüm yapılır)

1-Sıcaklık basamağı ihmal edilebilen katı cisimler

Sıcak bir akışkan içerisine ısı iletim katsayısı çok büyük olan küçük bir cisim, daldırılarak ısınmaya bırakılsın. Bu durumda cisim içerisinde sıcaklık basamağı ihmal edilebilir. Cisim için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

1. Isı iletim katsayısı çok yüksek olduğundan cismin ısı iletim direnci ihmal
2. Herhangi bir anda sıcaklık dağılımı üniform
3. Işınım ihmal
4. Özellikler sabit

A : Cismin dış yüzey alanı
 V : Cismin hacmi
 ρ : Cismin yoğunluğu
 c : Cismin ısınma ısısı
 T_i : Cismin ilk sıcaklığı
 T_∞ : Akışkan sıcaklığı
 h : Isı taşınım katsayısı
 $T_i < T_\infty$ olsun.



Burada problem, cismin başlangıçtan itibaren herhangi bir zamandaki sıcaklığının ve ısı miktarındaki değişiminin hesaplanabilmesidir. Termodinamiğin birinci kanununa göre cisme dt zamanında taşınım ile geçen ısı, cisimde depo edilen ısıya eşit olacaktır.

O halde cismin herhangi bir t anındaki sıcaklığı T olmak üzere, dt zamanında taşınım ile geçen ısı, dt zamanında cisimde depo edilen ısıya eşit olur.

dt zamanında taşımınla cisme giren ısı miktarı = dt zamanında cismin ısı enerjisindeki değişim miktarı

$$Q = hA(T_{\infty} - T) = V\rho c \frac{dT}{dt} \longrightarrow \int_{T_i}^T \frac{dT}{T_{\infty} - T} = \int_0^t \frac{hA}{V\rho c} dt$$

$$t = 0 \Rightarrow T = T_i$$

$$t = t \Rightarrow T = T \longrightarrow \theta = T - T_{\infty}, \theta_i = T_i - T_{\infty} \text{ tanımları yapılırsa,}$$

$$\ln \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = -\frac{hA}{V\rho c} t$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{V\rho c} t} \quad \text{yada,}$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp\left(-\frac{hA}{V\rho c} t\right)$$

$$f = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}$$

Elde edilen ifade termometrelerdeki bağıl gösterge hatasıdır.

Başlangıçtan t anına kadar, cisimde depo edilen ısı miktarı (ya da cismin ısı miktarındaki değişim), cismin t anındaki sıcaklığı T olmak üzere,

$$Q_d = V\rho c(T - T_i)$$

Cismin sıcaklığı çok uzun zaman sonra limit durumda akışkan sıcaklığına eşitlenir. Bu durumda cisme geçen maksimum ısı miktarı;

$$Q_{\max} = V\rho c(T_{\infty} - T_i)$$

Soru: 1,4 cm çapında karbon çeliğinden ($k=40 \text{ W/mK}$) yapılmış bir bilye 480°C sıcaklığından 80°C sıcaklığa kadar, 25°C sıcaklığındaki hava akımı ile soğutulmak isteniyor. Bilye ile hava arasındaki ısı taşınım katsayısı $90 \text{ W/m}^2\text{K}$ olduğuna göre bilyenin soğuma zamanını bulunuz? (Karbon çeliği için $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $c = 473 \text{ J/kgK}$)

Çözüm:

$$h=90 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$T_i=480^\circ\text{C}$$

$$T=80^\circ\text{C}$$

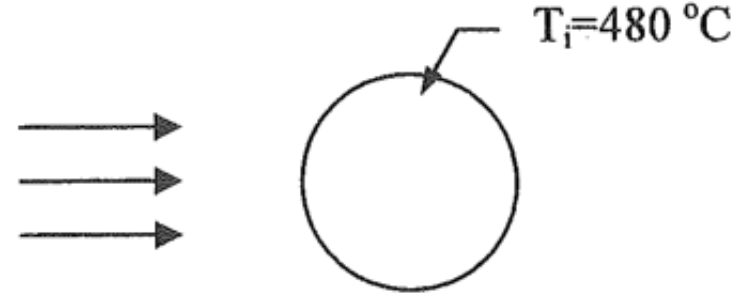
$$T_\infty=25^\circ\text{C}$$

$$D=0,014 \text{ m} \rightarrow r=0,007 \text{ m}$$

Hava akımı

$$T_\infty=25^\circ\text{C}$$

$$h=90 \text{ W/m}^2\text{C}$$



$$\text{Bilyenin hacmi: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(0,007)^3 = 1,436 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\text{Bilyenin alanı: } A = 4\pi R^2 = 4\pi(0,007)^2 = 6,15 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Hangi yöntemle çözüleceğine karar vermek için Biot sayısının hesaplanması gerekir.

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{1,436 \times 10^{-6}}{6,15 \times 10^{-4}} = 0,0023 \text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{90 \times 0,0023}{40} = 0,0052$$

$Bi=0,0052 < 0,1$ olduğundan sıcaklık basamağı ihmal edilebilen yöntem ile çözülebilir.

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp\left(-\frac{hA}{V\rho c}t\right)$$

$$-\frac{hA}{V\rho c}t = \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}}$$

$$t = -\frac{V\rho c}{hA} \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = -\frac{1,346 \times 10^{-6} \times 7800 \times 473}{90 \times 6,15 \times 10^{-4}} \ln \frac{80 - 25}{480 - 25}$$

$$t = 202 \text{ s} = 3,37 \text{ dak}$$

Bu zaman içinde bilyeden havaya geçen ısı miktarı;

$$Q = \rho V c (T_o - T) = 1,436 \times 10^{-6} \times 7800 \times 473(480 - 80)$$

$$Q = 2119,2 \text{ J}$$

2-Bir boyutlu zamana bağılı ısı iletimi

a) Düzlem levha hali

T_i sıcaklığında ve $2L$ kalınlığında sonsuz uzunlukta bir levhanın, dış yüzeyi aniden T_y sıcaklığına geldiğinde ($T_i > T_y$), levha içerisindeki sıcaklık dağılımı Şekilde gösterildiği gibi zamana göre değişir.

İçerisinde ısı üretimi olmaması halinde, bir boyutlu ve zamana bağılı ısı iletiminin genel denklemi, denkleminden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Burada,

$$T = f(x, t)$$

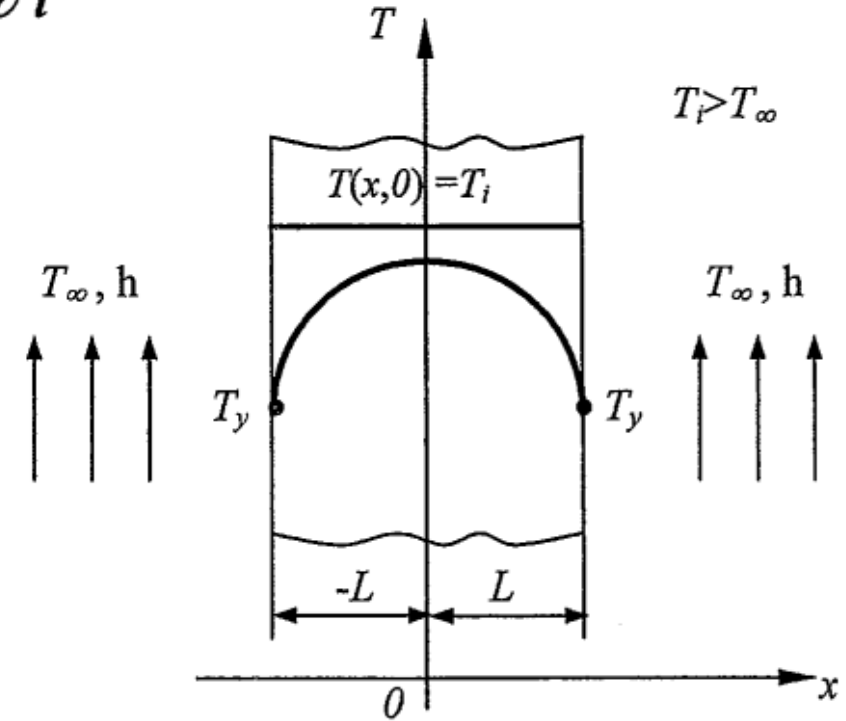
$$T(x, t) = T - T_i$$

dır. Sınır şartlar:

$$t = 0 \Rightarrow T(x, 0) = T_i$$

$$x = L \Rightarrow T(L, t) = T_y$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$



Şekil 3.16 Zamana bağılı ısı iletiminde sıcaklık dağılımı ($T_i > T_\infty$).

bağıntısı elde edilir. Başlangıçta referans sıcaklığına (akışkan sıcaklığına) göre levhada depolanmış ısı miktarı,

$$Q_o = V\rho c(T_i - T_\infty)$$

şeklinde hesaplanır. Burada V cismin hacmi, p cismin yoğunluğu ve c 'de cismin özgül ısısıdır. Denklemden verilen sıcaklık dağılımı bağıntısı incelendiğinde, boyutsuz sıcaklık, dağılımının, üç boyutsuz büyüklüğün bir fonksiyonu olduğu görülür. Bu fonksiyon,

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = f_1\left(\frac{\alpha t}{L^2}, \frac{hL}{k}, \frac{x}{L}\right)$$

Isı geçişi; iki boyutsuz büyüklüğün fonksiyonudur. Bunlar:

$$\frac{Q}{Q_o} = f_2\left(\frac{\alpha t}{L^2}, \frac{hL}{k}\right)$$

Zamana bağlı ısı geçişinde, sıcaklık dağılımı ve ısı geçişi için yukarıda çıkarılan bağıntıların kullanımı pratik olmadığından, bu denklemlerin çeşitli araştırmacılar tarafından, grafikler halinde çözümleri verilmiştir. En önemlisi **M.P. Heisler** tarafından verilen grafiklerdir.

Heisler grafiği, 2L kalınlığındaki sonsuz uzunluktaki bir levhanın, merkez eksen (merkezindeki) sıcaklığın yada L kalınlığındaki sonsuz uzunluktaki bir levhanın yalıtılmış yüzeyinin sıcaklığı kullanılarak;

Sonsuz uzunluktaki bir levhada zamana bağlı olarak ısı geçişi verilmiştir. Bu grafiklerde boyutsuz sayı olarak Biot sayısı (Bi) ve Fourier sayısı (Fo=T) kullanılmıştır. Biot sayısı (Bi),

$$B_i = \frac{hL}{k} \rightarrow B_i^{-1} = \frac{k}{hL}$$

Cismin bir yüzeyinden diğer yüzeyine iletimle geçen ısı miktarının cisimde depo edilen ısı miktarına oranı olarak tanımlanan Fourier sayısı (Fo=T) da;

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Ayrıca ısı geçişinin hesaplanabilmesi için Şekil kullanılarak; yatay eksende boyutsuz sayı olarak;

$$B_i^2 F_o = \frac{\alpha h^2 t}{k^2} = \frac{h^2 t}{\rho c k}$$

Bu boyutsuz sayılarda

k= Cismin ısı iletim katsayısı (W/mK)

h= ısı tasınım katsayısı (W/m²K)

L=levhanın yarı kalınlığı (m)

ρ= yoğunluğu (kg/m³)

α= ısı yayılım katsayısı (m²/s)

t= zaman (s)

T₀= Merkez eksen sıcaklığı (°C)

T_i= Cismin ilk sıcaklığı (°C)

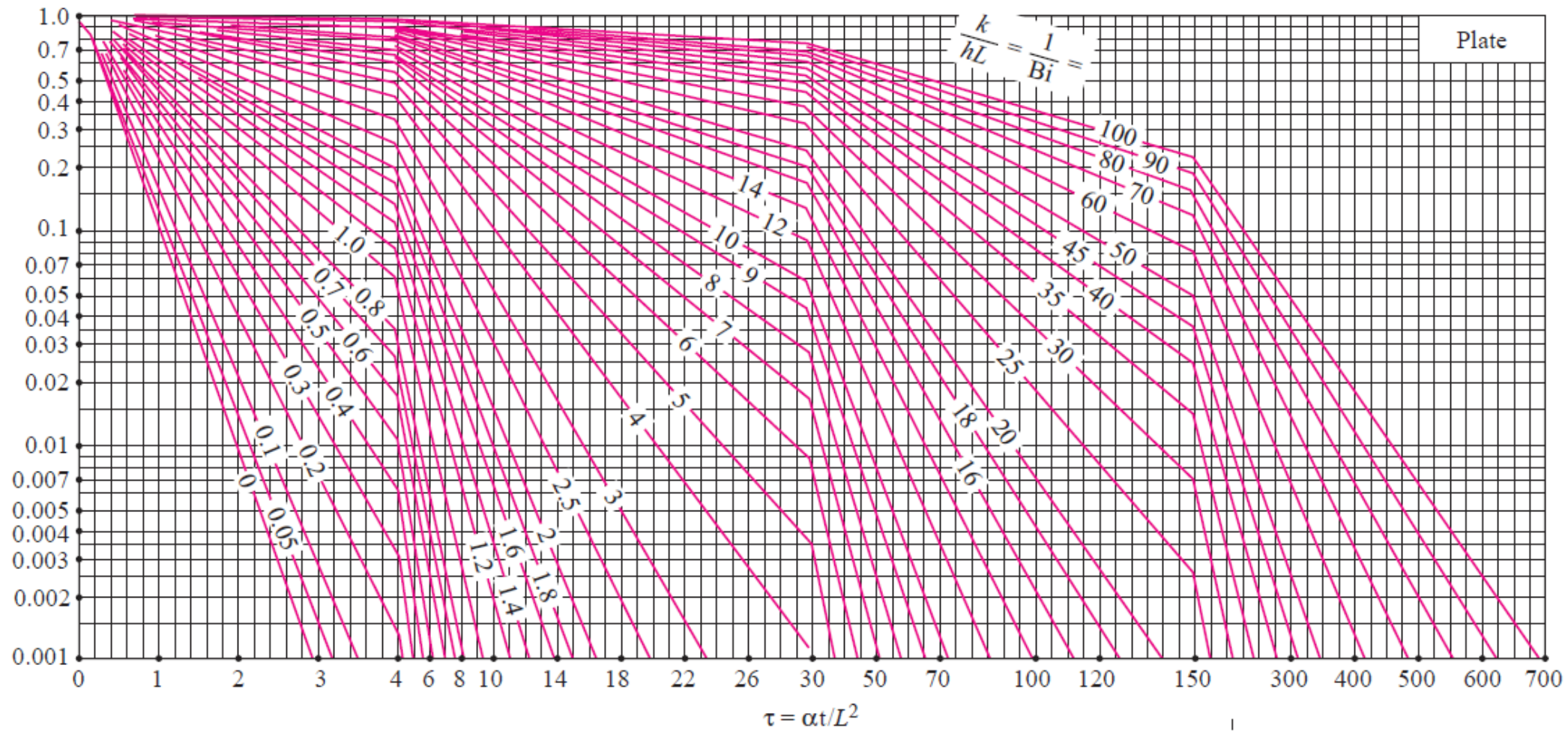
T_∞= Akışkan sıcaklığı (°C)

T=Merkez eksenden herhangi bir uzaklıktaki sıcaklık (°C)

Q₀= Akışkan sıcaklığına göre başlangıçtaki iç enerji (W)

Q= İç enerji değişim (W)

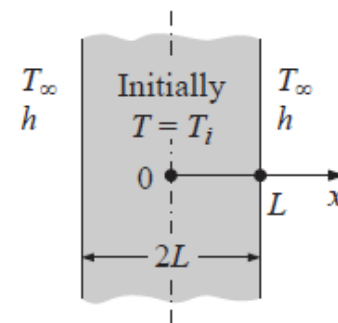
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

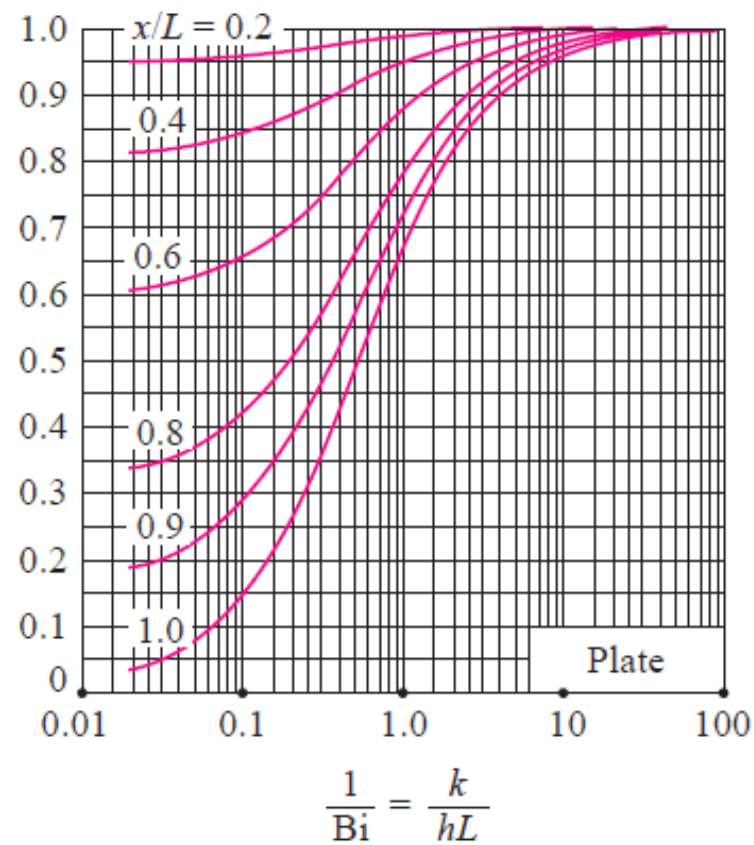


(a) Midplane temperature (from M. P. Heisler)

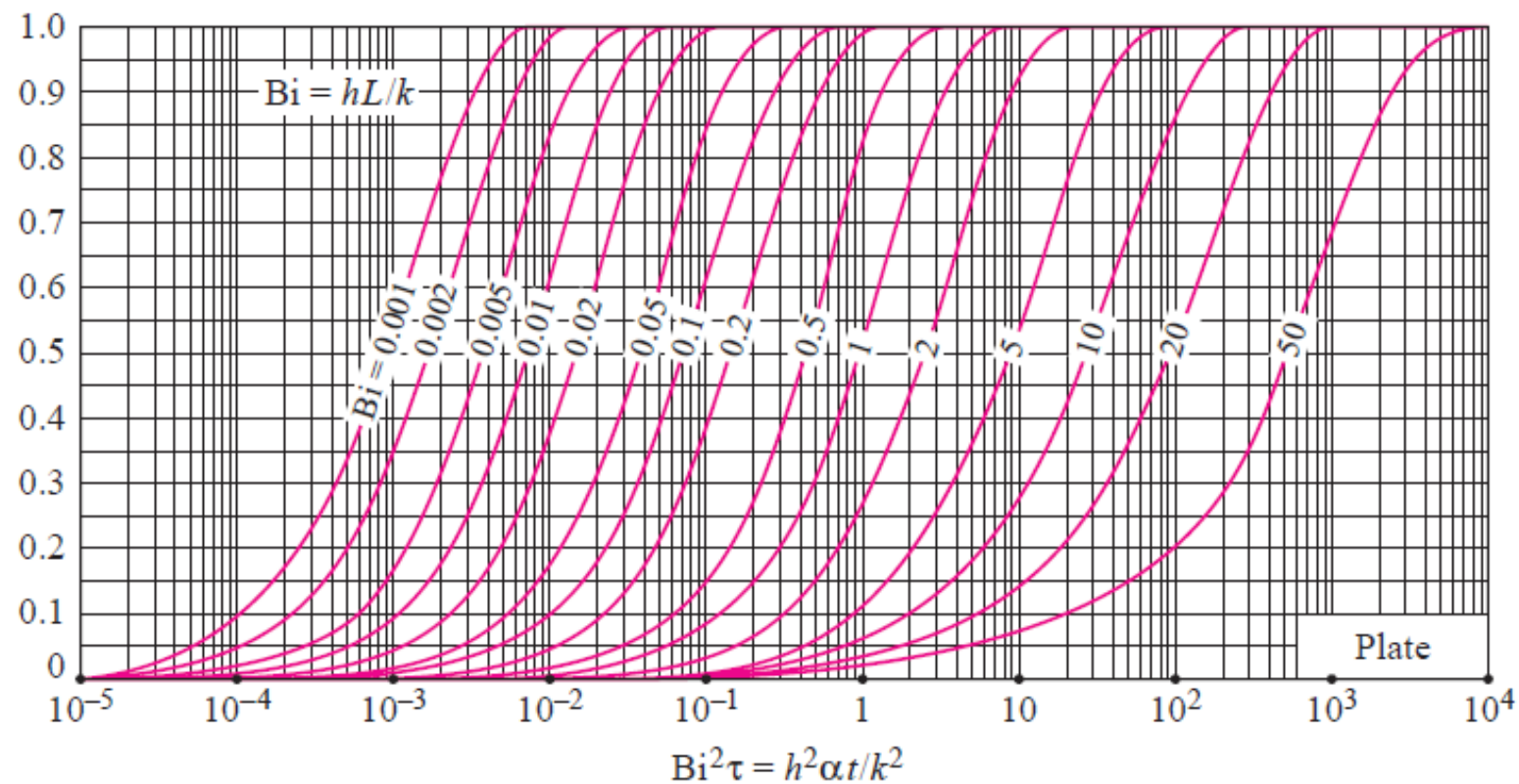
$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$

$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$





(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)



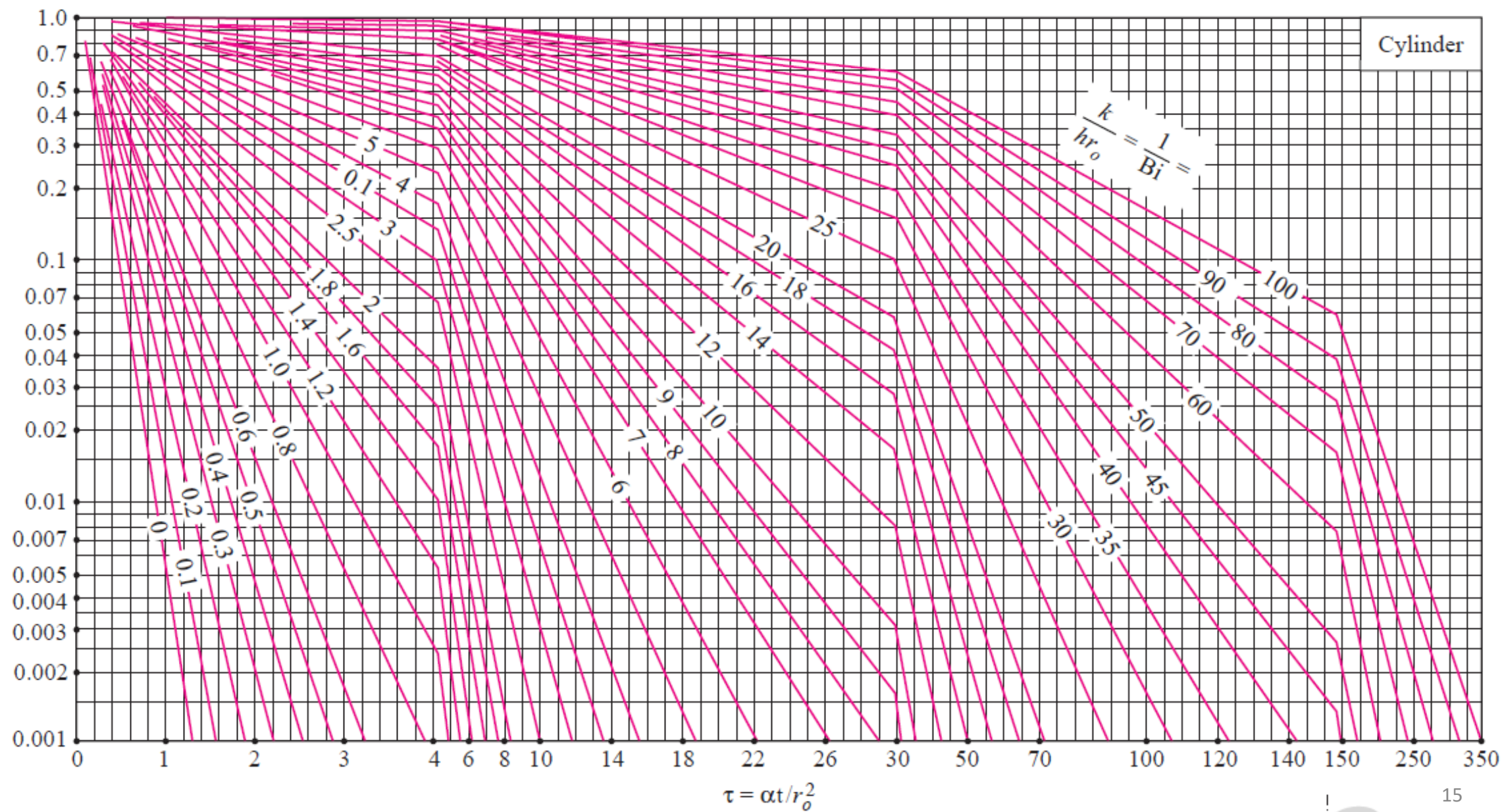
(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

b) Silindirik yüzeylerde zamana bağlı ısı geçişi

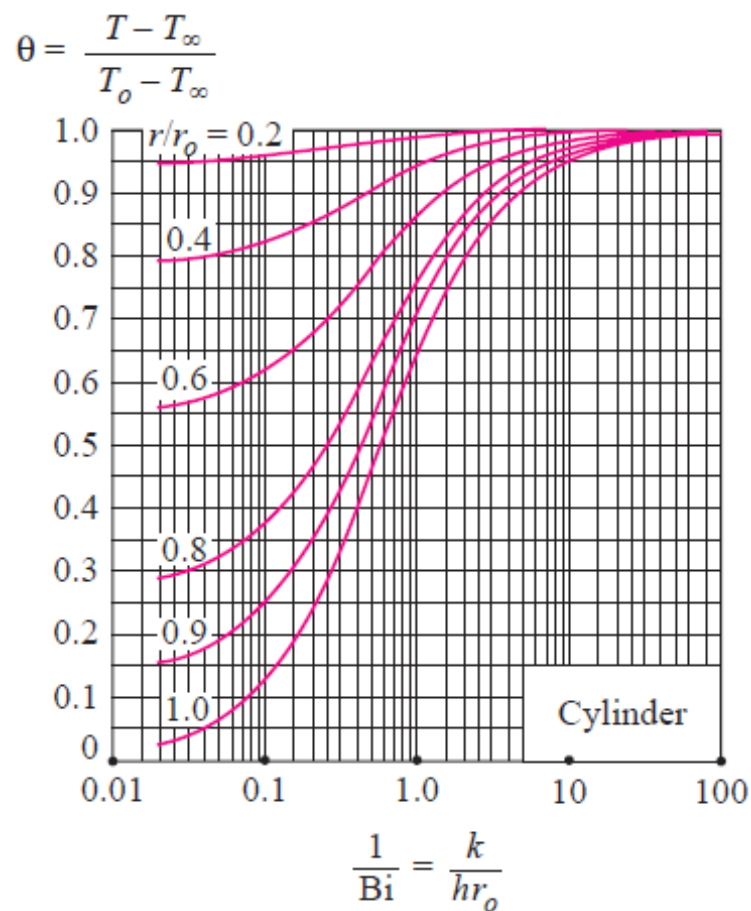
Silindirik ve küresel yüzeyler için de Heisler grafikleri düzenlenmiştir.

$2r_0$ çapında sonsuz uzunlukta silindirik bir parçadaki zamana bağlı eksen sıcaklığının değişimi, sıcaklık dağılımının değişimi ve ısı geçişi verilmiştir.

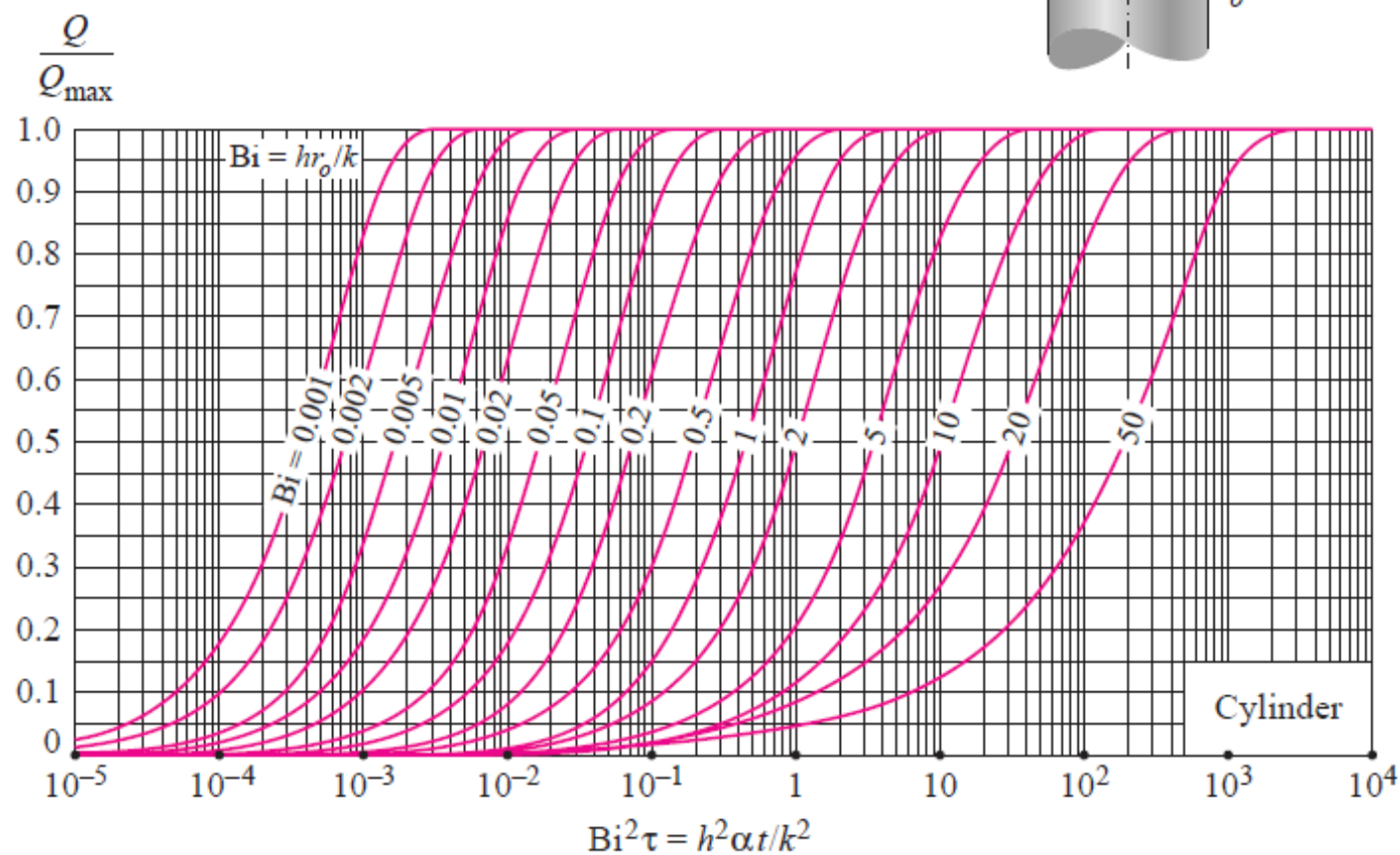
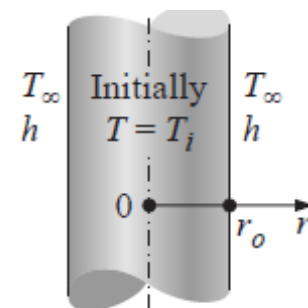
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



(a) Centerline temperature (from M. P. Heisler)



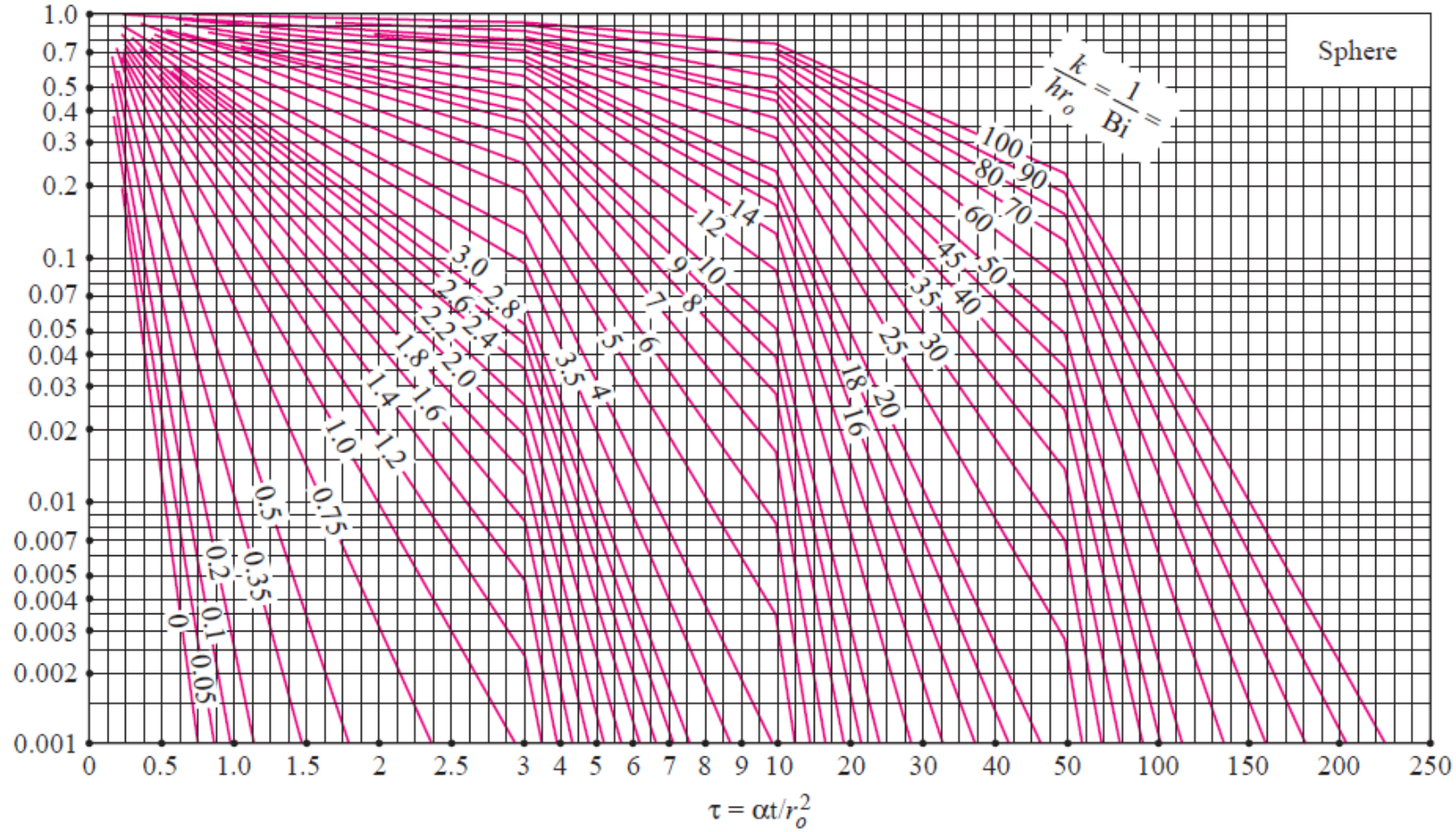
(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)



(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

c) küresel yüzeylerde zamana bağlı ısı geçişi

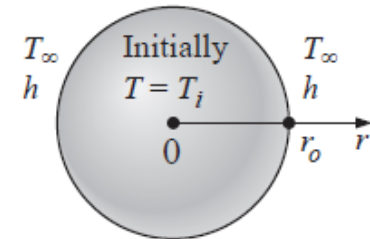
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

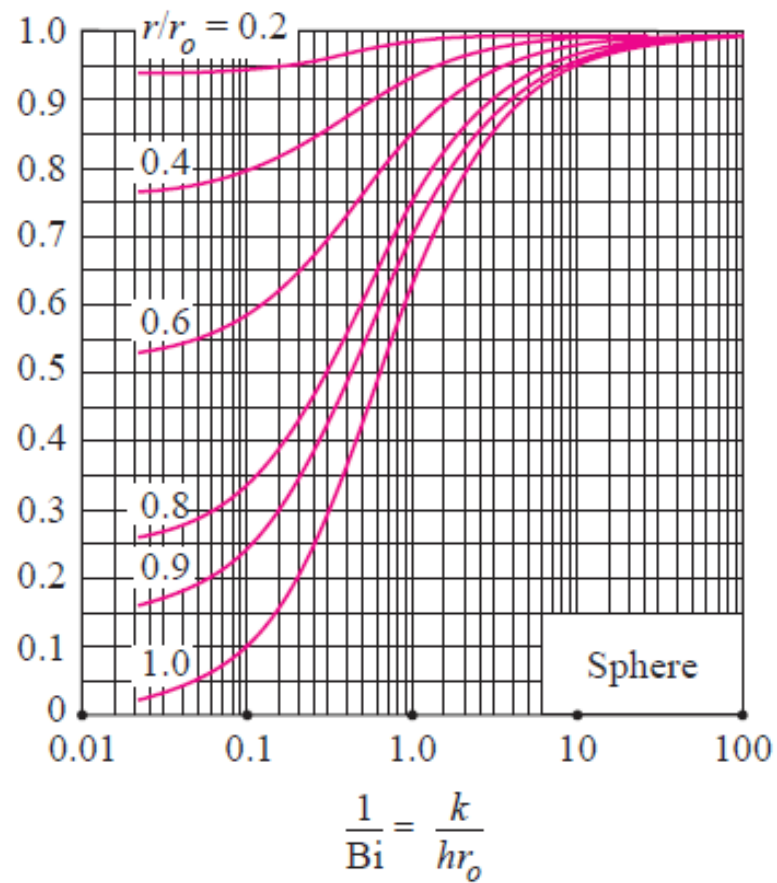


(a) Midpoint temperature (from M. P. Heisler)

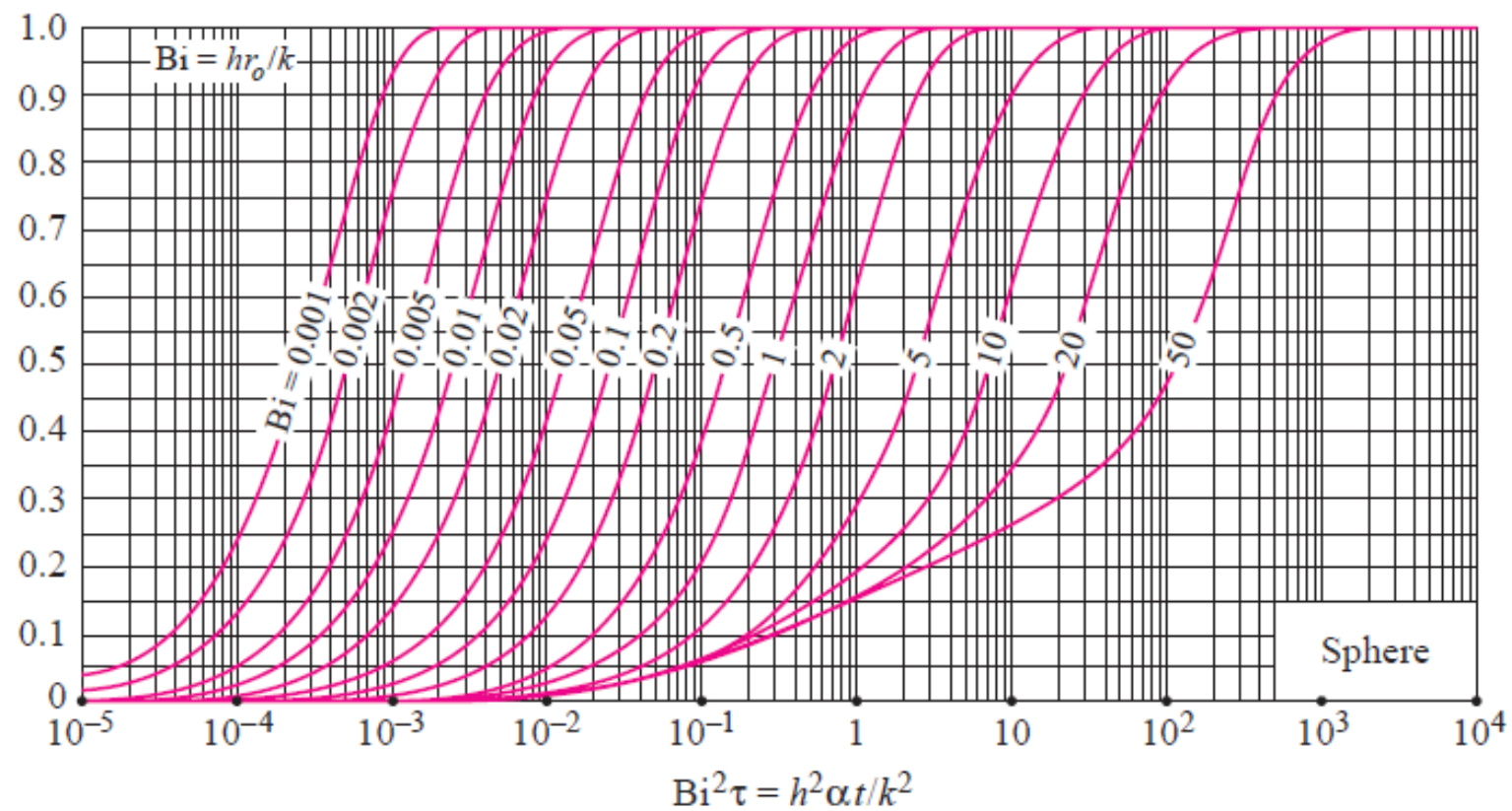
$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$

$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$





(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)



(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

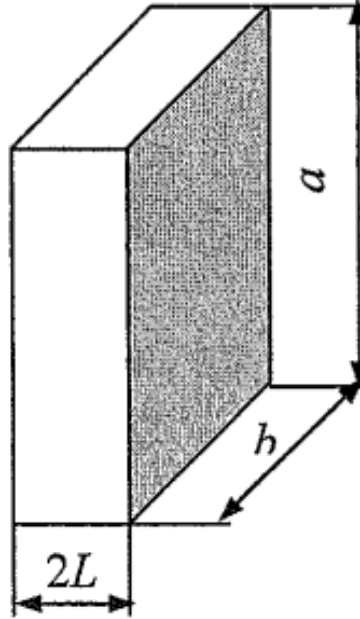
Soru: 0,50 m kalınlığında 1 m genişliğinde ve 5 m uzunluğunda çelik bir levha 600 °C sıcaklığında bir akışkan içerisinde daldırılıyor. Levha ile akışkan arasındaki ısı taşıma katsayısı 1000 W/m²K, levhanın ısı iletim katsayısı 40 W/mK, levhanın özgül ısı 0,50 kJ/kgK, yoğunluğu 7600 kg/m³ ve levhanın ilk sıcaklığı 25 °C olduğuna göre 30 dakika sonra;

- Levhanın merkez eksen ve yüzeyinin sıcaklıklarını hesaplayınız.
- Levhanın merkezinden 75 mm uzaklıktaki sıcaklığı bulunuz.
- Bu sürede çelik levhaya geçen ısı miktarını hesaplayınız.

Çözüm

Kabuller:

- Levhanın uç tesirleri ihmal
- Yarı sonsuz uzunlukta levha
- Özellikler sabit
- Işınım ihmal.



$$\begin{aligned}2L &= 0,50 \text{ m} \\ a &= 5 \text{ m} \\ b &= 1 \text{ m} \\ T_{\infty} &= 600 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ T_i &= 25 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ h &= 1000 \text{ W/m}^2\text{K} \\ k &= 40 \text{ W/mK} \\ \rho &= 7600 \text{ kg/m}^3 \\ c &= 0,50 \text{ kJ/kgK}\end{aligned}$$

Heisler diyagramlarından yararlanabilmek için gerekli değerler:

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{1000 \times 0,25}{40} = 6,25 \rightarrow Bi^{-1} = \frac{k}{hL} = 0,16$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{k}{\rho c} \times \frac{t}{L^2} = \frac{40}{7600 \times 500} \times \frac{30 \times 60}{(0,25)^2} = 0,30$$

a) Şekil 3.17' deki *Heisler* diyagramından $2L$ kalınlığındaki levha için,

$$\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0,75$$

bulunur ve buradan da eksen sıcaklığı,

$$T_o = 0,75 (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,75 (25 - 600) + 600$$

$$T_o = 168,7 \text{ } ^\circ\text{C}$$

bulunur. Levhanın yüzey sıcaklığı için;

$$\frac{x}{L} = \frac{L}{L} = 1 \text{ ve } Bi^{-1} = 0,16 \text{ için Şekil 3.18 deki sıcaklık dağılımı diyagramından,}$$

$$\frac{T_y - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = 0,2$$

ve buradan levhanın yüzey sıcaklığı;

$$T_y = 0,2 (T_o - T_{\infty}) + T_{\infty} = 0,2 (168,7 - 600) + 600$$

$$T_y = 513,7 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

b) $\frac{x}{L} = \frac{0,075}{0,25} = 0,3$ ve $Bi^{-1} = 0,16$ için Şekil 3.18 deki sıcaklık dağılımı diyagramından,

$$\frac{T_x - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = 0,9$$

bulunur ve buradan da merkezden 75 mm uzaklıktaki sıcaklık,

$$T_x - 600 = 0,9 (168,7 - 600)$$

$$T_x = 211,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

c) Isı geçişi diyagramını kullanabilmek için;

$$Bi^2 F_o = 6,25^2 \times 0,30 = 11,72$$

$Bi^2 F_o = 11,72$ ve $Bi = 6,25$ değerleri için Şekil (3.19) diyagramından,

$$\frac{Q}{Q_o} = 0,50 \rightarrow Q = 0,50 Q_o$$

bulunur. Q_o için denk.(3.71) göz önüne alınırsa levhaya geçen ısı miktarı,

$$Q = 0,50 \times Q_o = 0,50 [V \rho c (T_i - T_\infty)]$$

$$Q = 0,50 [0,5 \times 1 \times 5 \times 7600 \times 500 (25 - 600)]$$

$$Q = -2731250000 \text{ J}$$

$$Q = -2731250 \text{ kJ}$$

bulunur. Burada (-) işareti, ısı geçişinin akışkandan levhaya doğru olduğunu gösterir.

Soru: 1,5 cm yarı çapında ve sıcaklığı 250 °C olan alüminyum bir küre, ısı taşınım katsayısı 200 W/m²K ve sıcaklığı 20 °C olan su içerisine batırılıyor. Alüminyum küre içerisinde sıcaklık basamağı olmadığı kabul edilerek, kürenin sıcaklığın 35 °C'ye düşmesi için gerekli zamanı bulunuz? (Alüminyum için ; $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$, $c = 903 \text{ J/kgK}$, $k = 237 \text{ W/mK}$)

Çözüm :

Kabuller: 1. Sıcaklık basamağı yok. 2. Işınım ihmal. 3. Özellikler sabit.

Verilenler

$$T_{\infty} = 20^{\circ}\text{C}$$

$$T_i = 250^{\circ}\text{C}$$

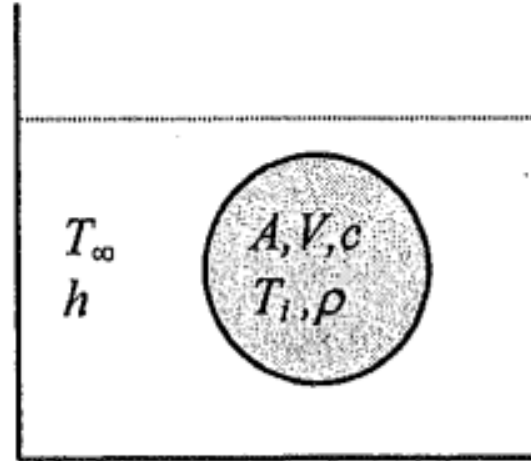
$$h = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 903 \text{ J/kgK}$$

$$T = 35^{\circ}\text{C}$$

$$t = ?$$



Yapılan kabullere göre denk.(3.61)' den 35°C a düşmesi için gerekli zaman;

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{V\rho c}t}$$

$$-\frac{hA}{V\rho c}t = \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}$$

$$t = -\frac{V\rho c}{hA} \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}$$

$$t = -\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho c}{h4\pi r^2} \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = -\frac{0,015 \times 2702 \times 903}{3 \times 200} \ln \frac{35 - 20}{250 - 20}$$

$$t = 166,5 \text{ sn}$$

Soru: Duralüminyumdan (Al-Cu alaşımı) yapılmış 16 mm çapında 1500 adet küre şeklindeki bilyeler 25° C sıcaklığında iken, 500 °C sıcaklığındaki bir fırın konularak 135° C sıcaklığına kadar ısıtılmak istenmektedir. Bilyeler ile fırın ortamı arasında ışınímda dahil olmak üzere ısı taşıním katsayısı 70 W/m²K olduğuna göre bilyeler fırında ne kadar kalmalıdır? Bu zaman içinde bilyelere geçen ısı ne kadardır?

Çözüm:

$$h=70 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$T_i=25^\circ\text{C}$$

$$T=135^\circ\text{C}$$

$$T_\infty=500^\circ\text{C}$$

$$D=0,016 \text{ m} \rightarrow r=0,008 \text{ m}$$

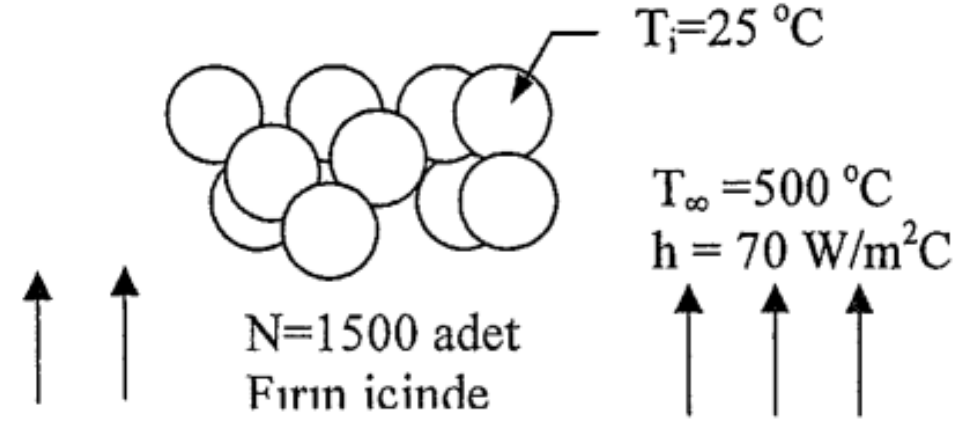
$$N=1500 \text{ adet}$$

Al-Cu için:

$$c=0,883 \text{ kJ/kgK}$$

$$\rho=2787 \text{ kg/m}^3$$

$$k=182 \text{ W/mK}$$



Hangi yöntemle çözüleceğine karar verebilmek için Biot sayısının hesaplanması gerekir.

$$V = \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0,008^3 = 2,14 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$A = 4 \times \pi r^2 = 4 \times \pi \times 0,008^2 = 8,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{2,14 \times 10^{-6}}{8,0 \times 10^{-4}} = 0,267 \times 10^{-2}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{70 \times 0,267 \times 10^{-2}}{182} = 0,00102$$

$Bi = 0,00102 < 0,1$ olduğundan sıcaklık basamağı ihmal edilebilir. Buna göre gerekli zaman;

$$\frac{T_1 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho c V} t}$$

$$\frac{135 - 500}{25 - 500} = e^{-\frac{70 \times 8 \times 10^{-4}}{2787 \times 883 \times 2,14 \times 10^{-6}} t}$$

$$0,768 = e^{-0,0106 t}$$

$$\ln 0,768 = -0,00106 t$$

$$t = 24,9 \text{ s}$$

olarak bulunur. Bu zaman sürecinde bilyelerin aldığı ısı miktarı;

$$Q = V \cdot \rho \cdot c \cdot (T - T_i) \cdot N = 2,14 \times 10^{-6} \times 2787 \times 0,883 \times (135 - 25) \times 1500$$

$$Q = 868,95 \text{ kJ}$$

Soru: 10 cm kalınlığında ve 1 m genişliğinde uzun çelik bir levha $T_i = 240\text{ °C}$ sıcaklığında iken, aniden $T_0 = 40\text{ °C}$ sıcaklığındaki yağ banyosuna daldırılıyor. Levha ile yağ arasındaki ısı taşınım katsayısı $h = 600\text{ W/mK}$ ve çelik için $\rho = 7833\text{ kg/m}^3$, $c_p = 465\text{ J/kgK}$, $k = 43\text{ W/mK}$, $\alpha = 1,2 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ dır.

- a) Ne kadar zaman sonra çelik levhanın merkez eksen sıcaklığı 100 °C olur?
- b) Çelik levhanın yüzeyinden 3 cm içerideki sıcaklığı ne olur?
- c) Bu süre içerisinde birim uzunluktaki levhaya geçen ısı miktarını hesaplayınız.

Çözüm:

Kabuller: 1. Zamana bağlı bir boyutlu ısı iletimi, 2. Özellikler sabit, 3. Kenar tesiri ihmal
4. Işınım ihmal.

- a) Levhanın kalınlığı 10 cm olduğuna göre $L = 10/2 = 5\text{ cm} = 0,05\text{ m}$ dir. Biot sayısı;

$$B_i^{-1} = \frac{k}{hL} = \frac{43}{600 \times 0,05} = 1,43$$

$$\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{100 - 40}{240 - 40} = 0,3$$

olur ve bu iki değer yardımıyla Şekil 3.17'den $Fo = 1,4$ bulunur. Diğer taraftan Fo ,

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$t = \frac{FoL^2}{\alpha} = \frac{1,4(0,05)^2}{1,2 \times 10^{-5}}$$

$$t=292 \text{ s}$$

bulunur.

a) Yüzeyden 3 cm içerideki sıcaklık, merkez eksenden $x=5-3=2$ cm deki sıcaklıktır.

$$\frac{x}{L} = \frac{0,02}{0,05} = 0,4$$

Şekil 3.18'den $Bi^{-1}=1,43$ ve $x/L=0,4$ için,

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = 0,95$$

bulunur. Buradan da yüzeyden 3 cm içerideki sıcaklık,

$$T = T_{\infty} + 0,95(T_o - T_{\infty}) = 40 + 0,95(100 - 40)$$

$$T=97 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

b) Birim uzunluk için levhaya geçen ısı miktarlarını bulabilmek için;

$Bi^2 Fo = (0,7)^2 \times 1,4 = 0,686$ ve $Bi^{-1} = 0,7$ 'den $Bi=0,7$ değerleri için şekil 3.19'dan,

$$\frac{Q}{Q_o} = 0,6$$

bulunur. 1 m uzunluğundaki levhanın hacmi $V=0,1 \times 1 \times 1 = 0,1 \text{ m}^3$ olur buna göre levhadan yağa geçen ısı miktarı,

$$Q = 0,6 Q_o = 0,6 [\rho c_p V (T_i - T_\infty)]$$

$$Q = 0,6 [7833 \times 465 \times 0,1 (240 - 40)]$$

$$Q = 43700000 \text{ J}$$

$$Q = 43,7 \text{ MJ}$$

olarak bulunur.